

5.) Plikationen

Das System des Packens kann fortgesetzt werden. Wir werden lediglich die quadratischen Packungen weiter verfolgen, also diejenigen, in denen jede Zeile genauso viele Elemente und damit Spalten hat wie die erste Zeile.

Die vorige Stufe ist erreicht, indem gesetzt wurde $a \underline{1} a = a \underline{2} \underline{2}$ und entsprechend aufwärts $a \underline{1} a \underline{1} a = a \underline{2} \underline{3}$ usw. Entsprechend kann man setzen $a \underline{2} a = a \underline{3} \underline{2}$ und dann weiter aufwärts $a \underline{2} a \underline{2} a = a \underline{3} \underline{3}$, was in üblicher Schreibweise $a.a.a = a^3$ lautet und als Potenzieren bekannt ist. Diese Operation ist nicht mehr kommutativ, man kann Operand und Operator nicht mehr tauschen ohne Änderung des linearen Ergebnisses. Der Operand heißt die *Basis*, die Operation *Potenzieren* und der Operator die *Potenz*.

Aus dem bisherigen kann nun folgende Matrix aufgebaut werden:

	1	2	3
1	1	1	1
2	2	4	8
3	3	9	
4			
&			
Z	Z	Z.Z	Z.Z.Z

Z steht für aushilfsweise für "zehn", also 1111111111. Mit Hilfe dieser Operation lässt sich die dezimale Darstellung der Zahlen unter Benützung der Urzahl, acht Hilfsziffern und eines Leerzeichens bei Festlegung einer Reihenfolge, einer Begrenzung in gedrängter Darstellung erreichen. Die letzte Reihe der Matrix ist in üblicher umgekehrter Reihenfolge unter Einschluss der Operandenspalte:

& |a.Z.Z.Z.Z||a.Z.Z||a.Z ||a |
 oder & |a.Z*3 ||a.Z*2||a.Z*1||a.Z*0|

Bei Benützung des Leerzeichens und der Ziffern können die Grenzzeichen weggelassen werden. Im folgenden wird zur vereinfachten Darstellung neben dieser vollständigen Darstellung die Exponentialdarstellung mit dem Hilfszeichen E benützt, bei der die Mantisse weggelassen wird. Die Darstellung wird hier nicht behandelt, weil sie für unsere Zahlentheorie unbedeutend ist. Die Matrizen der ersten drei Ordnungen sähen so aus:

1 2 3	1 2 3	1 2 3
1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
2 2 4 8	4 4 16 64	16 16 256 4E3
3 3 9 27	27 27 729 1E4	1E4 1E4 3E8 7E12

Man sieht, dass diese Matrizen den multiplikativen nicht ähnlich sind, denn es taucht in der ersten Zeile nicht der Wert des Operators auf, sondern nur die eins.

Wenn a die Zeile repräsentiert und b die Spalte, ist zu unterscheiden zwischen $a*b$ und $b*a$. Man kann auch eine umgekehrte, also retrograde Operation einführen, nämlich $*$, für die gelten soll $a*b \# b*a$. Letztere soll allgemein auch $\underline{31}$ sein, die gewöhnliche Potenzierung $a*b$ soll $\underline{32}$ sein. Man könnte diese Operation Retropotenzieren nennen. Die Matrizen der ersten drei Ordnungen sähen so aus:

1 2 3	1 2 3	1 2 3
1 1 2 3	1 1 2 3	1 1 2 3
2 1 4 9	4 1 16 81	16 1 6E4 4E7
3 1 8 27	27 1 1E8 7E127	E12 1

Hier liegt Ähnlichkeit mit den multiplikativen Matrizen vor, deshalb soll diese Operation als erste gelten. Nach dem gleichen Bildungsgesetz kann man weiter fortfahren, setze

$a \underline{31} a = a \underline{4} \underline{2}$

und entsprechend so weiter

$a \underline{31} a \underline{31} a = a \underline{4} \underline{3}$.

Es ergibt sich dadurch eine weitere Rechnungsart, die nicht auf das Potenzieren zurückzuführen ist.

An dieser Stelle ist es nötig, zunächst diese Rechnungsart zu benennen. Es ist üblich, die Operation 2 als Multiplikation zu bezeichnen. Hieran anknüpfend bezeichne die Addition als *Soloplikation*, die Multiplikation als *Biplikation*, das Potenzieren als *Triplikation* und deshalb diese höhere Rechnungsart als *Quadroplikation*. Diese Bezeichnungen haben den Vorteil, dass die Verwandtschaft und die Ordnung leicht erkenntlich sind.

Bei konkreten Zahlen stellt sich die Frage, wie man eine Quadroplikation nun ausrechnet, es ist jedenfalls nicht

$$3 \ 4 \ 3 = (3*3)*3 = 3*(3.3) = 3*9$$

zu rechnen, sondern

$$3*(3*3) = 3*27$$

Schon aus diesem kleinen Beispiel wird ersichtlich, dass die Zahlen der Quadroplikation schnell in astronomische Größenordnungen wandern. Beim Ausrechnen müssen also die Potenzen, d.h. immer der letzte Operator zuerst gerechnet werden und der Algorithmus auf eine niedrigere Stufe gebracht werden, d.h. es werden die Operatoren sukzessive linearisiert im Gegensatz zum Kettenpotenzieren, bei denen zunächst die Operanten aufsteigend linearisiert werden. Hierin liegt auch die Reihenfolge der Operationen von * und · begründet. Bei Anwendung des Diagonalverfahrens ergeben sich aus oben dargestellten 31-Matrizen folgende quadratische Matrix:

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	4	16	6E4
3	1	27	7E12	
&				
Z	1E0	1EZ	Z*1EZ	

Statt mit Lichtjahren als Größen zu arbeiten, könnte mit einem Zahlensystem aufbauend auf Quadroplikationen gerechnet werden, das Problem ist lediglich, dass die Vorstellungskraft diese Zahlen schlecht erfasst, aber vielleicht nur eine Gewöhnungsfrage. Die Bildungsformel wäre entsprechend:

$$\& \ |a.Z413| \ |a.Z412| \ |a.Z411| \ |a.Z410|$$

Mit den Ziffern käme man allerdings nicht aus, für jede Stufe müsste eine weitere Darstellung eingeschaltet werden, um eine lückenlose Zahlenreihe zu erhalten.

Das Potenzieren 32 ergibt ebenfalls eine höhere Rechenart, die sich aber leicht aus der Eigenschaft $(a*b)*c=a*(b.c)$ errechnen lässt und bei weitem keine so gewaltigen Zahlen wie die 41-Operation ergibt. Die 42-Matrix sieht so aus:

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	4	16	256
3	3	27	2E4	7E12
&				
Z	1E1	1EZ	1EZ.Z	

7.) Das Parterresystem

Das oben vorgestellte System der Plikationen ist nicht das einzige denkbare. Statt die Diagonalen auf der 2 aufzubauen, könnte auf jeder anderen Zahl aufgebaut werden. Wir wollen im folgenden einmal den Aufbau auf der Zahl 1 untersuchen, und feststellen, wohin das führt. Die Matrix für die Addition ergibt sich wie bisher:

$$\begin{array}{l} 2 \ 3 \ 4 \\ 3 \ 4 \ 5 \\ 4 \ 5 \ 6 \end{array}$$

Aus der Einserdiagonale werden nun die Werte für den Operator 1 der Multiplikation gewonnen:

$$\begin{array}{l} 2 \ 3 \ 4 \\ 4 \ 6 \ 8 \\ 6 \ 9 \ 12 \end{array}$$

Aus der Einserdiagonale wird wiederum die Reihe für den Einseroperator der Potenzierung ermittelt:

2 4 8
6 18 54
12 48 192

Die übrigen Werte sind bereits eingetragen und wurden nach den gleichen Regeln ermittelt wie bei den üblicherweise verwendeten Plikationen.

Man kann mit diesem System genauso rechnen wie mit dem üblichen, die Formeln sind allerdings anders. Soweit es sich um Flächen oder Rauminhalte handelt und im übrigen die gleichen Flächen- bzw. Raumbegriffe zugrunde gelegt werden, ergeben sich folgende Formeln in der Gegenüberstellung mit den üblichen.

	<u>2-er</u>	<u>1-er</u>
Rechteck	a.b	a.(b-1)
Kreis	2.p.r*2	1.(p-1).r.(r-1)
Rechteckant	a.b.c	a.(b-1).(c-1)

Es zeigt sich, dass bekannte einfache Formeln relativ komplizierter sind, ohne dass diese einen anderen Vorteil hätten. Die Multiplikation ist nicht mehr kommutativ, d. h. die Orthogonalen der Bildungsmatrix sind nicht mehr vertauschbar. Beim bisherigen System war dies lediglich ab der Potenzierung der Fall. Dieses System, das man als Parterresystem bezeichnen könnte, weil die Diagonalen nicht erst im ersten Stock, sondern direkt mit der Urzahl beginnen, ist also für die Berechnung von Flächen und Rauminhalten für den üblichen Flächenbegriff weniger geeignet. Da die Anwendung der Mathematik zum großen Teil in der Geometrie mit solchen Gebilden arbeitet, ist dieses Parterresystem hierfür keine brauchbare Alternative, andere Anwendungen wären zu untersuchen. Für diese praktischen Zwecke ist also das allgemein übliche kommutative Multiplikationssystem geeigneter.

Was die Schreibweise allerdings anlangt, ist das gebräuchliche System nicht besonders einsichtig. Wie schon die Zahlbildung geschichtlich gewachsene Inkonsistenzen zeigt, ist sowohl die Benennung als auch die Darstellung der Triplikationen zumindest nicht glücklich. Die Darstellung der Potenz als kleingestellte Hochzahl ist sinnigerweise umgekehrt entsprechend ihrer Wirkung, und überdies muss man spätestens bei der zweiten Potenzierung eine vergrößernde Brille aufsetzen, weil es nicht mehr leserlich wird. Die Hochzahlen sind historisch gewachsen und für die gebräuchlichen kleineren Anwendungen brauchbar, für theoretische Zwecke weniger geeignet. Man könnte einwenden, das seien nur Äußerlichkeiten, dieser Ansicht bin ich aber nicht, denn auch eine klare Darstellung trägt zumindest zum besseren Verständnis und leichteren Handhabung bei.

Es ist also festzuhalten, dass die gebräuchlichen Plikationen nicht die einzig möglichen sind. Beispielsweise kann die Multiplikation deshalb nur definiert, aber nicht aus der Addition bewiesen werden.

9.) Verknüpfungen

Wie sieht nun die Verwendung negativer Zahlen bei Multiplikation und Potenzierung aus, wenn die beiden Operationen miteinander verknüpft werden? Wir arbeiten uns an das Problem heran. Gehe zunächst von einem bekannten Produkt aus, lasse die Basis unverändert und verringere das Argument eins um eins. Das sieht z.B. für 1.2 so aus:

1.2 = 1.(3-1)
1.1 = 1.(2-1)
1.Q = 1.(1-1) = 1.(Q)
1.-1 = 1.(1-1-1) = 1.(Q-1)
1.-2 = 1.(1-1-1-1) = 1.(Q-1-1)

Und es ist sogleich ersichtlich, den nächst niederen Schritt wird gewonnen durch Verminderung des Operators um eins, sodass man logischerweise zwischen eins und minus eins bei Q landet (und nicht bei null, also nicht bei nichts).

Das gleiche Verfahren mache für eine negative Zahl, das sieht so aus:

$$\begin{aligned} -1.-2 &= -1.(-3+1) \\ -1.-1 &= -1.(-2+1) \\ -1.-Q &= -1.(-1+1) = -1.(-Q) \text{ usw.} \end{aligned}$$

Dieses Verfahren kann mit jedem Operanden und jedem Operator gemacht werden und es vermindert die Zahlenmatrix jeweils um eine Zeile. Bei Verminderung des Argumentes, also Veränderung der Basis, verändern sich die Spalten der Matrix. Der Betrag dieses Produktes ist leicht durch Abzählen zu ermitteln und damit sind auch entsprechende Rechenregeln aufzustellen, als Einmaleins bekannt. Ergänzend sei bemerkt, dass auch das Einmaleins bereits eine hochstehende geistige Leistung ist, denn es setzt ein gleichmäßiges Potenzsystem mit auf der einen Seite genügend großer Anzahl Ziffern, auf der anderen Seite nicht zuviel Ziffern voraus.

Wir haben mit positiven und negativen Zahlen operiert, ist das Ergebnis nun positiv oder negativ? Nach der bisherigen Erklärung der Zahlen als Matrizen wäre auf den ersten Blick anzunehmen, alle Produkte seien immer positiv. Man könnte die Matrizen nun auch bei Überwiegen des negativen Anteils nach oben versetzen, nachdem die Matrize nach oben schrumpft bei schwindendem Argument und die so oben entstehende Matrize als negativ bezeichnen. Hierzu müsste eine Achse eingeführt werden, unterhalb ist positiv, oberhalb negativ. Das kann man aber genauso gut anders machen, eine zwingende Handhabung gibt es nicht. Es ist also zu bestimmen, welches Vorzeichen das Produkt haben soll, wenn man für das Produkt ein einheitliches Vorzeichen überhaupt möchte, denkbar wäre auch, das Produkt zerfällt in mehrere Teile, wie bei komplexen Zahlen.

Zunächst sind daher die Möglichkeiten aufzulisten, die eine Verknüpfung von zwei Vorzeichen ermöglichen. Das sind die 16 nachfolgend aufgelisteten Möglichkeiten. Dabei steht für die Zeile der Operand +- und für die Spalte der Operator +-.

1)++	2)--	3)+-	4)++	5)++
++	++	++	-+	+-
16)--	15)+-	14)--	13)--	12)--
--	--	--	+-	++
11)++	10)+-	9)+-		
--	+-	-+		
6)--	7)+-	8)+-		
++	-+	+-		

Die ersten beiden Gruppen sind ungleichmäßig, denn es sind verschieden viele Vorzeichen der einen Sorte gegenüber der anderen Sorte. Bei dem einen würden also rein statistisch die positiven, bei dem anderen die negativen Zahlen als Ergebnis überwiegen. Die dritte und vierte Gruppe ist gleichmäßig, die Vorzeichen sind gleich oft vertreten. Von diesen Systemen zeichnen sich die 8) und die 9) aus, sie sind symmetrisch um die Diagonale. Die Nummern bei den Systemen bezeichnen die Reihenfolge, wenn man sie systematisch entwickelt. Es ist leicht zu sehen, dass zu jedem System ein inverses System vorhanden ist, das jeweils darunter dargestellt ist, z.B. zu 1) ist 16) invers, zu 11) ist 6) invers und zu 9) ist 8) invers. Das System 11) ist im Folgenden beispielhaft dargestellt:

$$\begin{array}{ll} +a.-b = -c & +a.+b = +c \\ -a.+b = +c & -a.-b = -c \\ +b.-a = -c & +b.+a = +c \\ -b.+a = +c & -b.-a = -c \end{array}$$

Dieses System ist nicht kommutativ, die einzigen kommutativen Systeme sind das System 1),16) und 8),9). Das 1) System führt zu der als Betrag bekannten Operation, das 16) System, zu dem ersten invers, ist der negative Betrag. Das neunte System ist unser übliches und das achte System ist dasjenige der Imaginärzahlen. Ersichtlich ist hieraus, dass das neunte System eigentlich keine Präferenz hat, es ist genauso gut wie das achte. Möchte deshalb das achte einfach inverses System nennen und mit einem i bezeichnen, normalerweise sagt man hierzu imaginär aus historischen Gründen. Unglücklicherweise ist in der formelhaften Darstellung der

Mathematik die Benutzung dieser Systeme zum einen nicht richtig erkennbar, zum anderen sind auch noch völlig verschiedene Zeichen in Verwendung, so dass der Zusammenhang der Systeme nicht klar wird.

Welches System ist nun für die normalen Rechnungen brauchbar? Zweifellos das neunte System, denn für die weitaus überwiegend reinen Plusmultiplikationen ist das Produkt ebenfalls Plus, es ist kommutativ, das heißt, Multiplikand und Multiplikator können vertauscht werden in Kombination mit der Zweierplikation. Das gebräuchliche System ist also eine reine Sache des Praktischen.

Die Systeme lassen sich nebeneinander anwenden. Möchte für 1) verwenden $\div$, für 16) $\div +$ und für 8) i . Die sonst üblichen Bezeichnungen für 1) und 16) halte ich nicht für glücklich, denn es zeigt nicht die Verwandtschaft zu 9). Die Systeme 8) und 9) können auch nebeneinander additiv kombiniert werden, dies heißt gewöhnlich *komplexe Zahl*. Die Kombination hat dann die Form $a+ib$ mit *Real-* und *Imaginärteil*. Bei der Monoplikation bleiben die beiden Teile getrennt, bei höheren Plikationen treten Wechsel der beiden Teile auf, was zu andersartigem Funktionieren der komplexen Zahlenebene führt.

Im Falle einer oben definierten Operationsinversion können bei den komplexen Zahlen auf das 9) System bezogen inkomplette Zahlteile auftreten, die ebenfalls mit dem Symbol i dargestellt werden. In unserer Darstellung ist daher das Symbol i ein Operationszeichen oder ein Vorzeichen, wie $+$ und $-$. Gewöhnlich wird i als $-1^{1/2}$ definiert. Nach unserer Zahlentheorie ist diese Definition bereits ein Ergebnis. Gewöhnlich wird i deshalb als Multiplikand in einer Multiplikation verwendet, diese Operation wird mit dem hier vertretenen Zahlenbegriff genauso ausgeführt, ist aber nicht der Inhalt des Symbols, sondern nur eine Reihenfolge. Genauso wie die Kombination von 8) und 9) gemacht werden können, sind auch andere Kombinationen möglich mit entsprechenden wiederum andersartigen Zahlenebenen. Die Kombinationen nenne *Modi*.

10.) Triadische Zahlen

Gewöhnlich werden negative Zahlen als Ergebnis einer Umkehrung der Subtraktion erklärt. Dies ist aber nur dann gültig, wenn wie in dem Thermometer-Beispiel ein symmetrisches System gewählt wird. Aber auch bei diesem gibt es bei komplexen Operationen die Erscheinung, dass die Subtraktion eines Ausdrucks und ein negatives Argument eines Ausdrucks nicht zum gleichen Ergebnis führt. Es wäre also besser, grundsätzlich, wie das auch bei Computern geschieht, zwischen Subtraktionszeichen und negativem Zeichen zu trennen. Zumindest muss man sich im klaren sein, dass je zwei verschiedene Paar Stiefel vorliegen. Die Erklärung der üblichen negativen Zahlen ist die Umkehrung einer Subtraktion. Nach der hier vertretenen Zahlenauffassung können die negativen Zahlen auch als inverse Matrix entstehen durch fortgesetzten Abbau einer positiven Matrix. Der Abbau ist der umgekehrte Vorgang wie der Aufbau, die negativen Endzahlen entstehen dadurch, dass über die Operation Q hinaus die Operation fortgesetzt wird. Mit realen Gegenständen wie Schafen ist das nicht mehr vorstellbar, hier kann eine Subtraktion lediglich bis zu einem leeren Pferch führen. Mit der Bestimmung von Forderungen und Schulden geben solche negativen Zahlen jedoch einen Sinn.

In diesem Bereich ist aber andererseits eine Bevorzugung einer Zahlenart nicht gegeben, positive wie negative sind gleichwertig, das System könnte genauso gut auf negativen Zahlen als den normalen aufgebaut werden und positive sind die Ausnahme, genauso gut wie man den Strom physikalisch gesehen letztlich falsch herum bezeichnet, aber diese Benennung hat sich nun mal eingebürgert und ist genauso brauchbar.

Man ist gewohnt, bezüglich inverser Operationen immer nur in Dualismen zu denken, nämlich in positiv und minus, in Addition und Subtraktion usw. Es wäre genauso gut möglich, eine Triade von Zahlen einzuführen, positiv, negativ und ein Drittes, das z.B. neutros heißen kann. Es läge dann keine Zahlengerade vor, sondern ein Stern mit drei Strahlen, ein Strahl für positive, ein weiterer Strahl für negative und ein dritter Strahl für neut-

rale Zahlen. Eine weitere einzuführende Operation, die Neutralisierung, würde eine positive oder negative Zahl in Richtung neutralem Strahl verschieben, genauso wie eine Subtraktion eine neutrale oder positive Zahl in Richtung negativen Strahl verschieben würde. In diesem Fall müsste genauso wie beim Dualistischen System der Ursprung nicht als Nullpunkt eingeführt werden, man könnte genauso gut den Ursprung mit 1 für alle drei Zahlenstrahlen beginnen.

Ein höheres System wäre ebenfalls denkbar, als nächstes ein quartales System. Ein in dieser Weise aufgebautes quartales System ist mit der Doppelachse der komplexen Ebene nicht vergleichbar, weil dort grundsätzlich imaginäre und reelle Achse getrennt bleiben.

Für die *Neutralisation* kann das Zeichen / verwendet werden. In Bezug auf die Addition gibt es jetzt zwei Arten von *inkompletten* Zahlen, nämlich die negativen und die neutralen, letztere sollen ebenfalls mit / bezeichnet werden. /a ist also eine subtraktiv und additiv inkomplette Zahl. Wird die neutrale Achse als Ausgangsgröße genommen, sind die positiven Zahlen inkomplett, nämlich neutral und subtraktiv inkomplett. Es gibt dann auch eine Operation $a/b=c$. Zur Veranschaulichung einige Beispiele:

$$\begin{aligned} +3-4 &= -1 ; & -1-4 &= -5 ; & -5+2 &= -3 ; & -3/1 &= -2 ; \\ -2/3 &= 1 ; & 1/2 &= 3 ; & 3+4 &= +1 ; & 3-4 &= -1 ; \end{aligned}$$

Die so definierte triadische Monoplikation kann auch mit höheren Plikationen kombiniert werden, z.B. der Multiplikation. In diesem Fall muss wie bei Kombination mit der dualen Monoplikation der Wert der Matrix, das heißt das Vorzeichen, festgelegt werden. Die Vorgehensweise entspricht dem bei der Multiplikation.

11.) Dividus

Auf die gleiche Weise wie bei der Bildung der negativen Zahlen kann auch eine inverse Operation bezüglich der Multiplikation gebildet werden. Hierbei wird zunächst entsprechend bei der Bildung einer additiven Matrix vorgegangen. Die Bildung der Matrizen ergibt sich dann also nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned} 2.2 &= 2+2+(2-2) \\ 2.1 &= 2+(2-2) \\ 2.Q &= (2-2) \end{aligned}$$

Damit kommt man noch nicht zu einer inversen Zahl als solcher, hierzu werden wieder wie bei der Addition die Operationen vertauscht, links sind die Operationen mit fortlaufender Nummer dargestellt, rechts mit den üblichen Zeichen für Multiplikation und Division:

a <u>21</u>	b = c	.a.b=.c
b <u>22</u>	a = c	.b.a=.c
c <u>23</u>	a = b	.c:a=.b
c <u>24</u>	b = a	.c:b=.a
a <u>25</u>	c = b	.a:c=:b
b <u>26</u>	c = a	:b.c=:a

Analog zur Addition gibt es wieder bei 23 und 24 eine neue Operation und bei 25 und 26 eine neue hierzu inverse Operation, die wiederum mit Hilfe zweier Funktionszeichen wie in der zweiten Spalte dargestellt mit den bekannten Zeichen erreicht werden kann. Im Fall 23 und 24 heißt der Operand *Dividend*, der Operator *Divisor* und die Operation *Division*. Das Ergebnis nennt sich *Quotient*, wobei manchmal auch die unausgeführte Operation hierunter verstanden wird. Wiederum ist im Falle $a=c$ die Operation nur ausführbar, wenn das Ergebnis quasi unausgerechnet stehen gelassen wird. Im Falle $a \neq 1$ wird hierfür ein Kurzzeichen eingeführt, das gleiche Zeichen wie für die neue Operation 13 und 14, die so gewonnene Zahl nenne *Dividus*, in Zeichen :a und entspricht einem natürlichen Bruch.

Die so definierte inverse Zahl kann auf alle Zahlen ausgedehnt werden. Also auch auf Q. Es ist also der Dividus :Q die inverse Zahl zu Q bezüglich der Multiplikation, genauso wie -Q die inverse Zahl zu +Q die inverse Zahl bezüglich der Addition ist.

Der Dividus ist im Kaufmännischen auch als *Reziprokzahl* bekannt. In der

Operation der Division ist dies der Divisor. Dieser unterscheidet sich im Begriff nach der hier vertretenen Zahlentheorie jedoch dadurch, dass er auch ohne Dividend vorkommen kann. Diese Zahlendarstellung ist also nicht abhängig von der Benützung einer eins als Dividend. Auch hier wieder das Gleiche wie bei dem Verhältnis von positiven und negativen Zahlen, Multiplikatus und Dividus sind gleichwertig, genauso wie sämtliche Rechnungen mit negativen Zahlen als Ausgangsbasis gemacht werden können, können auch mit so definierten inversen Multiplikationszahlen, den *Dividi*, diese als Ausgangsbasis betrachtet werden und der Multiplikatus als die Umkehrung. Das gilt auch für Q und :Q.

Möchte im normalen Rechenbetrieb allerdings die übliche Gewohnheit beibehalten, dass positive Zahlen auch ohne Pluszeichen dargestellt werden können und Multiplikati ohne Punkt, die Operation aber immer mit Punkt. Auch gilt nicht notwendigerweise, dass die Division eines Ausdrucks das gleiche Ergebnis zeitigt wie bei Verwendung eines Dividus.

13.) Inversionen

Zunächst können vor der Einführung einer inversen Operation additive Rückbildungen vorgenommen werden. Die additive Rückbildung führt auf Dividi. Entsprechend der additiven Inversion

$$(2-1)+5 = 5+1$$

$$(1-1)+5 = 5+Q$$

$$(1-2)+5 = 5-1 \quad \&$$

ergibt sich für die Multiplikation:

$$(2-1).5 = 1.5 = 5+5-5$$

$$(1-1).5 = Q.5 = 5-5$$

$$(1-2).5 = -1.5 = 5-5-5 \quad \&$$

Die multiplikative Rückbildung führt auf eine neue inkomplette Zahl, nämlich die Wurzel oder *Radix*:

$$(2-1)*5 = 5*1$$

$$(1-1)*5 = 5*Q$$

$$(1-2)*5 = 5*-1 \quad \&$$

Die inversen Operationen entstehen wiederum durch Vertauschen. Hierzu ist es zweckmäßig, die Operationen in der allgemeinen Bezeichnung darzustellen. In der Einserplikation sieht das wie folgt aus, wobei für eine beliebige Zahl a und b gelten soll a 11 b = c

<u>(1)</u>	<u>(2)</u>	<u>(3)</u>
a <u>11</u> b = c	++	+
b <u>12</u> a = c	++	+
c <u>13</u> a = b	+-	-
c <u>14</u> b = a	+-	-
a <u>15</u> c = b	-+	-
b <u>16</u> c = a	-+	-

In der Spalte (1) sind die verschiedenen Anordnungen dargestellt, in der Spalte (2) eine mögliche Darstellung mit den üblichen Zeichen für Addition und Subtraktion, wobei sowohl der Operator als auch der Operand mit einer Operation versehen wird, in der Spalte (3) ist die hier verwendete Reihenfolge zugrunde gelegt mit Operand, Operation, Operator und Resultat. Für die Zweierplikation sieht die Anordnung wie folgt aus:

<u>(1)</u>	<u>(2)</u>	<u>(3)</u>
a <u>21</u> b = c	..	.
b <u>22</u> a = c	..	.
c <u>23</u> a = b	..	:
c <u>24</u> b = a	..	:
a <u>25</u> c = b	..	:
b <u>26</u> c = a	..	:

Für die Dreierplikation sieht die Anordnung so aus:

<u>(1)</u>	<u>(2)</u>	<u>(3)</u>
a <u>31</u> b = c	:R	*
b <u>32</u> a = c	*	*

c <u>33</u> a = b	*	R
c <u>34</u> b = a		<u>L</u>
a <u>35</u> c = b	R	R
b <u>36</u> c = a	L	L

Hierbei bedeuten

* Potenzieren	* Inverspotenzieren
R Radizieren	<u>R</u> Inversradizieren
L Logarithmieren	<u>L</u> Inverslogarithmieren

Da nach dem oben aufgeführten definitionsgemäßen Bildungsweg $a^*:b \# aRb$ gilt, kann das Radizieren auf das Potenzieren zurückgeführt werden. Man beachte, dass die gewöhnliche Darstellung des Radizierens mit dem Wurzelzeichen invers dargestellt ist, was wiederum nicht zum Verständnis der Sache beiträgt, weshalb das Wurzelzeichen besser vermieden wird.

Bei der Multiplikation war eine Unterscheidung zwischen

$-(a \cdot b)$ und $(-a) \cdot b$

nicht notwendig, anders bei den Operationen der Dreierplikation, z.B. ist $-(a \cdot b)$ nicht stets dasselbe wie $(-a) \cdot b$. Zur Unterscheidung soll deshalb $-(a \cdot b)$ mit $-a \cdot b$ und $(-a) \cdot b$ mit $a \cdot (-b)$ dargestellt werden. $a \cdot (-b)$ ist entsprechend $a \cdot -b$. Das gleiche gilt für die Division.

15.) Funktionen

Eine Operation ist erklärt als Linearisierung einer Matrix, in welcher der Operand die Zeile darstellt und der Operator die Spalte. Die Operation hat feststehende Werte und die Linearisierung ist entsprechend relativ eindeutig. Die Operation hat folgenden Aufbau:

a f b j c

Dabei bedeuten a, b und c eine Zahl, das kann sein eine Summe der Urzahl oder eine Kombizahl in irgend einer Darstellungsart. Die Zahl kann negativ, reziprok, invers oder irgend eine andere inkomplette Zahl sein, dies wird durch ein *Präfix* angedeutet. Das Präfix kann sein ein übliches Vorzeichen oder die Zeichen reziproke, inverse Zahlen usw. Da Null keine Zahl ist, kann diese nicht vorkommen, sie ist ja nur Platzhalter. Um ein Resultat von a-a darstellen zu können, wird zugelassen, dass 0 als Zeichen erlaubt ist, wenn die Rechnung im übrigen beendet ist. Um trotzdem mit einem Teilausdruck, der Null würde, rechnen zu können, ist bereits Q verwendet mit der Bedeutung $Q \# 1-1$. Hierfür gilt nach der genannten Erlaubnis, dass am Ende der Rechnung $Q = 0$ gilt.

f ist Ausdruck der Operation. Ein Vorzeichen bedeutet, dass die gesamte Operation ihrerseits inkomplett nach dem verwendeten Vorzeichen sein kann. j zeigt die Verknüpfung an, dies kann sein = Konsekution, # Identität oder deren Negation ($\neq$, $\neq$). a heißt der Operand, f die Operation, b der Operator, j der *Indikator* des Resultats und c ist das *Resultat*. Den Indikator kann man auch als Vorzeichen des Resultats auffassen. Eine Operation kann auch zusammengesetzt sein, z.B.

(afb) g c = d

Hier kann g eine andere Operation sein, der Operand ist keine einfache Zahl mehr, sondern seinerseits eine Operation. Für solche operationale Zahlen werden Großbuchstaben verwendet, für (afb)#A gilt:

A f c = d

Auf a bezogen kann man im Falle (af)g c = d auch annehmen, dass eine kombinierte Funktion F vorliegt und könnte schreiben

a F c = d

Man kann nun den Operand nicht mit einer bestimmten Zahl belegen, sondern offen lassen, man spricht von der Verwendung einer Variablen. Entsprechend wird das Linearprodukt variabel. Bestimmte, aber beliebige Zahlen sind bisher mit a,b,c bezeichnet, Variable sollen mit x,y,z bezeichnet werden. Eine Operation unter Verwendung einer Variablen als Operand soll Funktion heißen. Hierbei wird das Resultat meistens ebenfalls eine abhängige Variable und wird deshalb als solche dargestellt. Bezeichne bei den Funktionen den Operanden als Argument, die Operation als Funktion, den

Operator als Basis, das Resultat als Dependenz, weil es die abhängige Variable ist. Der Indikator ist nur die Konsekution.

Basis, Funktion und Argument können auch zusammengesetzt sein, wiederum aus Unterfunktionen, in solchen Fällen werden sie durch Klammern eingefasst oder symbolisch mit Großbuchstaben bezeichnet. In der traditionellen Darstellung der Funktionen erscheinen manchmal Basis und Argument vertauscht, weil zwischen Funktion und deren Umkehrung nicht konsequent unterschieden wird. Diese Darstellung soll auch hier verwendet werden, obwohl z.B. die Schreibweise $x^*e=y$ der gewohnten $e^*x=y$ für die Exponentialfunktion vorzuziehen wäre, die Zusammenhänge der verwandten Funktionen mit verschiedenen Vorzeichen wäre leichter erkennbar.

Eine weitere Ungereimtheit liegt in der üblichen Darstellung der Reihenfolge. Die Konsekution wurde bisher von links nach rechts definiert, d.h. wenn $a \text{ f } b = c$ ist, gilt nicht unbedingt $c = a \text{ f } b$. Die Funktionen werden aber üblicherweise oft in dieser Weise aus schreibtechnischen Gründen dargestellt. Die Linearisierung eines Ausdrucks $a \text{ f } b$ wurde bisher von links nach rechts definiert, die Abarbeitung eines kombinierten Ausdrucks $a \text{ f } b \text{ g } h \text{ c} = d$ wird als Algorithmus bezeichnet, der grundsätzlich in dieser Richtung zu linearisieren ist. Die Abweichung hiervon ist nur zulässig, wenn die Identität des Ausdrucks nicht verändert wird. Für die nicht kommutativen Operationen leuchtet das unmittelbar ein. Im Fall der Platzierung der Dependenz links von der Indikation ist also diese von rechts nach links aufzufassen, im übrigen läuft aber der Algorithmus von links nach rechts. Zur Illustration ein einfaches Beispiel aus der üblichen Gleichungslehre, bei der kein gleiches Ergebnis erzielt wird bei Nichtbeachtung der Reihenfolge:

$$\begin{array}{lll} 3^*2 & = 9 & \text{ergibt radiziert } ||^*:2 \\ (3^*2)^*:2 & = 9^*:2 \\ 3^*(2:2) & = +-3 \\ 3^*1 & = \\ +3 & = +-3 \end{array}$$

Dagegen führt die Beachtung der Reihenfolge zu

$$\begin{array}{lll} (9)^*:2 & = 9^*:2 \\ +-3 & = +-3 \end{array} \text{ einem gleichen Ergebnis.}$$

Allgemein folgt aus $afb = c$ und $dfb = c$ nicht in jedem Fall $a = d$, und damit ist der Algorithmus und die Richtung der Konsekution zu beachten. Üblicherweise behilft man sich mit der Feststellung, dass eine mehrdeutige Funktion vorliegt und setzt sozusagen eine Deutung als gleichwertig voraus, z.B. Hauptwert des Logarithmus mit komplexen Zahlen.

Die Funktion kann man grafisch als Abbild auffassen und hierzu die oben bestimmten Zahlenkörper zur Darstellung verwenden, eine Funktion mit zwei Variablen ergibt dann in einem zweidimensionalen Raum eine Kurve. Jede Kurve hat eine Zentrale, die auf der Abszisse oder Ordinate verschoben werden kann durch Erweiterung der entsprechenden Variablen durch ein Additiv oder ein Subtraktiv. Solch eine in der Lage veränderte Kurve kann durch Variablensubstitution leicht in eine originäre Kurve zurückgeführt werden, so dass sie in der Systematik hier mit Ausnahme der Exponentialkurve uninteressant ist.

Der Unterschied zwischen einer beliebigen Zahl a und einer Variablen x liegt in der Bestimmung des Funktionsgliedes und parallel dazu der Betrachtung bzw. der Darstellung im grafischen Bild der Dependenz. Es ist oft möglich, nach den Regeln der Gleichungssysteme eine oben erläuterte geschlossene Funktion aufzuspalten in so viele Funktionen, wie Variable vorhanden sind, diese als Dependenzen einer weiteren Variablen darzustellen, einem sogenannten Parameter. Also z.B. für

$$\begin{array}{ll} x \text{ f } b = y & \text{folgt} \\ t \text{ g } b = x & \\ t \text{ h } b = y & \end{array}$$

16.) Reihen

Um an der Stelle 1-1 Operationen durchführen zu können, wurde Q eingeführt für $Q \# 1-1$. Der Reziprokwert von Q ist nach den bisherigen Regeln $:Q$. Es ergeben sich damit die bisher definierten Operationen, z.B. $Q:Q=1$ oder $a*Q=1$ (nämlich $a*1.a^{-1} \# a:a$), $Q*Q=Q:Q$. Dabei kann Q aufgelöst werden in den Definitionswert 1-1, wenn die Rechnung beendet ist, dann kann auch nach der Regel $N-N=0$ die Rechnung vereinfacht werden. Voraussetzung ist allerdings, dass keine Operation entsteht, bei der ein Glied null würde, eine solche Operation wäre nicht definiert. Das gilt auch für kombinierte Funktionen.

Aus der Umkehreigenschaft von Q und $:Q$ lässt sich folgern, wenn Q die kleinste definierte Zahl ist, muss $:Q$ die größte sein. Dabei kommt es auf die Vorstellung oder den Vergleich mit anschaulichen Objekten nicht an, denn genauso wenig wie man sich das Nichts vorstellen, kann man das Unendliche erfassen. Es reicht, sich damit zu begnügen, dass $:Q$ das Gegenteil von Q ist. Genauso wie man anstelle von positiven mit negativen Zahlen normal rechnen kann, ist es möglich, mit einem System mit dem Zentrum $:Q$ zu rechnen, anstatt mit Q. Da Q zwei Seiten hat, nämlich $+Q$ und $-Q$, hat dies auch $:Q$, gegenüber $+Q$ liegt $+:Q$, gegenüber $-Q$ liegt $-:Q$. Ohne Vorzeichen ist $+Q$ gemeint. $:Q$ ist eine Primzahl, sie ist nur durch sich selbst teilbar $(:Q):(:Q) = :Q.Q = 1$.

Bei Operationen mit einem Dividus kann dieser selbst entweder additiv kombiniert sein oder als Sonderfall $:Q$ sein. Der allgemeine Ausdruck mit Operationen bis zur Biplikation ist

$$A : (B+C)$$

Im folgenden wird dieser Ausdruck in der üblichen Multiplikation untersucht. Der Ausdruck kann umgeformt werden zu

$$D \cdot (1:(1+b))$$

wobei der Faktor D uninteressant ist. Bei einer Funktion ergibt er eine stärkeres Ansteigen der Kurve, an der Form ändert sich aber nichts. Der Ausdruck $1:(1+b)$ kann nun linearisiert werden wie definiert, das heißt die Matrix wird zeilenweise zu Additiven auseinandergenommen, wobei statt der Urzahl 1 Dividi als Bezugswerte erscheinen. Das führt auf das übliche Divisionsverfahren mit den folgenden zu wiederholenden Schritten:

- (1) Raten der nächst kleineren Multiplikation mit dem ersten Summand des Divisors zum Dividend des Ausdrucks als Produkt
- (2) Multiplikation des gesamten Divisors
- (3) Subtraktion dieses Produkts vom Dividenten
- (4) Mit der Differenz, in diesem Falle auch Rest bezeichnet, wird von 1) verfahren.

Das ergibt eine Reihe, das ist eine nach gleicher Gesetzmäßigkeit sich ändernde fortlaufende Summe:

$$1 : (1+b) =$$

$$1 - b + b^2 - b^3 \quad \& \quad - b^{n-1}, + b^n:(1+b)$$

oder

$$(I) \quad 1*Q - b*1 + b^2 \quad \& \quad + R$$

Das Zeichen "&" bedeutet "und so weiter". Das letzte Glied ist der Rest, der mit R bezeichnet wird und darf nur weggelassen werden, wenn die Rechengenauigkeit ihn nicht erfordert.

Unter der Voraussetzung, dass in einer Summe die Glieder vertauscht werden können, kann der Ausdruck auch $1:(b+1)$ gerechnet werden, es ergibt sich dann

$$(II) \quad :b*1 - :b*2 + b^3 - b^4 \quad \& \quad b^m - :b^m:(b+1)$$

n und m werden zur Nummerierung benutzt, n ist hier gerade, m ungerade.

Die Zahl b kann größer oder kleiner als eins, positiv oder negativ sein. Da der Rest keine Vereinfachung darstellt, ist die Reihe I oder II nur brauchbar, wenn der Rest für die weitere Rechnung nicht stört, also zu null entwickelt werden kann oder im Verhältnis zur benötigten Rechengenauigkeit unbedeutend klein wird. Dazu wird die Reihe auf $:Q$ Glieder entwickelt und das Restglied betrachtet. Dies ergibt

$$I \quad b*:Q : (1+b)$$

$$II \quad :b*:Q : (1+b)$$

Im Falle b größer als eins ist, kann Reihe II benutzt werde, im Falle kleiner eins die Reihe I. Beide Reihen führen für $b \neq 1$ zum selben Ergebnis:

$$\begin{array}{l} 1-1+1-1+1-1 \quad \& \quad R_n \quad 1:2 \quad \quad \quad \text{oder} \\ 1-1+1-1+1-1+1 \quad \& \quad R_m \quad -1:2 \end{array}$$

Dabei ist R_n der Rest bei geradzahligen Gliedern, R_m bei ungeradzahligen. Interessant wäre nun zu wissen, welches Vorzeichen R bei $:Q$ Gliedern hat. Dazu müsste bekannt sein, ob $:Q$ eine gerade Zahl oder nicht ist. $:Q$ ist ein Dividus einer subtraktiven Packung und damit in üblicher Bezeichnung eine rationale Zahl die sich in einem beliebigen Zahlensystem darstellen lässt, z.B.

$$1 : 5 = 20 : 100$$

Dabei tauchen einmal gerade und einmal ungerade Zahlen auf, so dass sich die Frage nicht bestimmen lässt, sondern vom verwendeten Zahlensystem abhängt. Für $b \neq 1$ lassen sich die Reihen nicht rechnen, hier muss der Ausdruck mit Q gerechnet werden und $1 : (Q)$ wird $:Q$, also eine Identität.

Um die Summe von Reihen übersichtlich darstellen zu können, wird entsprechend der üblichen Darstellung hier eine lineare Form benutzt:

$$Ft \ Z \ t; a/b$$

Hierbei bedeuten F der Summand, Z die Kennzeichnung als Summe, t der zu verändernde Parameter, a der erste Wert des Parameters für das erste Glied nach dem Trennzeichen, $/ b$ der letzte Wert des Parameters für das letzte Glied. Die Reihe I lässt sich damit so darstellen:

$$-b \cdot t \ Z \ t; Q/:Q,$$

18.) Binome

Wenn Ausdrücke der Form $A \cdot (a+b)^n$ vorkommen, ist es zweckmäßig, diese nach der binomischen Formel von Newton zu entwickeln. Interessant ist hier wieder die Sonderform $(1+b)^n$, und zwar insbesondere für den Fall $b \neq n$, in dem also ein Dividus vorliegt. Auf die binomische Formel kann auch hier voll zurückgegriffen werden, genauso wie auf die Hilfsfunktion der *Fakultät*. Zur vereinfachten Darstellung wird diese Funktion hier nach dem Schema Operand, Operation, Operator erweitert nach folgendem Modus: der Operand bezeichnet $m!$ im üblichen Sinne, der Operator die Anzahl der letzten Glieder. Es ist also $m!n$ in hiesiger Schreibweise gleich $m!:(m-n)!$ in üblicher Schreibweise. Abgekürzt sei $m!m \# !m$.

Im obigen Ausdruck kann als Extremwert auch Q oder $:Q$ vorkommen. Diese Zahl ist uns bereits begegnet, einige Folgerungen aus dem Gebrauch dieser Zahl sind noch anzufügen, um die Anwendung voll nutzen zu können.

Q	$= 1-1$		>0
$Q:Q$	$= Q:(Q)$	$= Q(:Q)$	$=1$
$:Q -N$	$= (1-N.Q):Q$	$= (1-N-N):Q$	$=:Q$
$(:Q-N).Q$	$= :Q.Q-N.Q$	$= 1-N-N$	$=1$
$!Q$	$= !(Q-1).Q$	$= :Q.Q$	$=1$
$!-1$	$= !(-1-1).-1$	$= -:Q.-1$	$=:Q$
$Q.N$	$= N-N$		> 0

Das oben genannte Binom findet sich in der auch als Zinseszinsrechnung bekannten Wachstumsformel I mit a als Ausgangsbestand, b als Zuwachsrate und c als Periode wieder:

$$I \# (a + b:c)^* c$$

Es wird nun mit Standardwerten $a \neq 1$ und $b \neq 1$ ein Binom I mit $:Q$ Perioden und korrespondierend dazu einer Zuwachsrate von Q gebildet, das mit e bezeichnet wird (Euler'sche Zahl):

$$I \# (1 + Q)^* :Q \quad \# e$$

Nach dem binomischen Lehrsatz ergibt sich

$$e = |(:Q!t):(!t). (Q*t)| \ Z \ t; Q/:Q$$

es ist

$$(:Q!t).(Q*t) = (:Q).(:Q-1).(:Q-2). \& .(:Q-t) \\ .(Q).(Q).(Q). \& .(Q)$$

Es gilt $(:Q-N).Q = 1$, daher ist

$$e = |:(!t)| Z t; Q/:Q$$

Die Interpretation dieses Wertes ergibt für die Zinseszinsrechnung ein Kapital von e aus einem Anfangskapital von 1 nach der Einheitszeit (dem Intervall) bei kontinuierlicher Zinseszinsverzinsung, oder beim unterstellten kontinuierlichen Wachstum einer Pflanze ergibt sich eine Endlänge nach der Einheitszeit aus einer Anfangslänge von 1. Weder in der soziologischen noch in der physikalischen Welt entspricht dies der Wirklichkeit, so dass eine solche kontinuierliche mathematische Betrachtung nur Modellcharakter hat. Möchte dies trotzdem als brauchbares Modell benutzen und hieraus den Begriff der Stetigkeit ableiten. Wenn in einem gegebenen Intervall sich $:Q$ Teilungen machen lassen wodurch Abschnitte von Q entstehen, soll das Intervall stetig sein. Auch hier dienen die Erklärungen nur der Vorstellung, mathematisch für die Definition entscheidend ist die Beziehung von Q zu $:Q$ als äquivalente Menge $FQ\# :Q$.

19.) Differenzialquotient

Wer mit dem Fahrrad einen Berg hinauffährt, weiß, was Steigung ist. Wir wissen es bei unserer Betrachtungsweise noch nicht und müssen zunächst eine Definition geben. Hierbei gehe vom Fahrradbeispiel aus und stelle fest, dass die zwei Achsen der Räder eine Gerade ergeben, welche eine desto höhere Kraftanstrengung bei aufwärts geneigter Gerade erfordert, je mehr diese Gerade von der Horizontalen abweicht. Da ein Fahrrad zwei hintereinander liegende Räder hat, liegt eine Strecke zwischen beiden Berührungspunkten der Räder vor, welche dadurch optimal an einen krummen Straßenverlauf angepasst werden kann, indem die beiden Achsen der Räder in eine Achse überführt werden, also ein doppeltes Einrad benutzt wird. Die Steigung lässt sich nun so definieren, dass im Punkt A mit dem Berührungspunkt dieser Doppelachse der Winkel zwischen der Senkrechten, nämlich der Schwerpunktslinie, und der Normalen im Punkt A zugrunde gelegt wird (siehe Bild 19A). Dieses Verhältnis kann als Quotient eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten T und S durch das Verhältnis T zu S ausgedrückt werden. Bei dieser Definition ist die konkrete Länge von S bei uns Q , da beide Achsen im Punkt A liegen sollen.

Aus dieser Definition folgt, dass die Steigung Null ist, wenn die Normale mit der Senkrechten zusammenfällt, sie ist gleich 1, wenn S und T gleiche Größe haben, sie ist im umgangssprachlichen Sinne unendlich, wenn die Normale im rechten Winkel auf der Senkrechten steht. T wird in Richtung vom Ursprung gemessen, damit wird die Steigung negativ, wenn die Normale sich nach links neigt, physikalisch gesehen ein Gefälle vorliegt.

Interessant wäre nun die Möglichkeit, aus der Funktion der Straße die Steigung in irgendeinem Punkte A rechnerisch abzuleiten. Der Straßenverlauf soll als parabolische Funktion im oben definierten Sinne darstellbar sein. Hierzu wird das Steigungsdreieck in ein wie oben beschriebenes orthogonales Bezugssystem übertragen (siehe Bild 19B). Die Schwerpunktslinie sei parallel zur Ordinate. Die Normale im Punkt A ist jedoch noch nicht bekannt. Betrachte daher zunächst die Steigung für ein gewöhnliches Fahrrad. Aufgrund der Ähnlichkeit von Dreiecken ergibt sich folgende Beziehung für T:S, wobei a und b die Fußpunkte der Lote der zunächst auseinanderliegenden Achsen des Fahrrads auf der Abszisse darstellen:

$$(fa-fb):(a-b)$$

Diese Beziehung gilt immer für $a \neq b$. Das gewonnene Ergebnis probiere gleich einmal aus bei einer Funktion des Straßenverlaufs in der Form $y=x$:

$$(a-b):(a-b) = 1$$

und für eine Funktion $y=x^3$:

$$(a^3-b^3):(a-b) = a^2 + ab + b^2$$

Nun gibt aber bei $a=b$ der Punkt B nur dann eine zur Normalen im Punkt A gehörige Tangente des Straßenverlaufs, wenn der Straßenverlauf linear ist. Für einen parabolischen Straßenverlauf erreicht man das, wenn man gemäß obiger Definition $a=b$ setzt. Aus der Beziehung $N-N=N.Q$ und Division mit N

folgt die Identität $a-b \# Q$, sodass wir Q einsetzen dürfen. Das charakteristische Steigungs-Dreieck hat nun eine Kathetenseite von Q . Es ergibt sich damit der als *Differenzialquotient* bekannte Ausdruck für YD als Steigung:

$$YD = (fx+Q, -fx) : (x+Q - x) \text{ oder gekürzt} \\ = (fx+Q, -fx) : Q$$

Für die Funktion $y=x^2$ ergibt sich damit folgender Wert:

$$YD = ((x+Q)^2 - x^2) : Q \\ = (x^2 + 2.x.Q + Q^2 - x^2) : Q \\ = 2.x.Q : Q + Q.Q : Q = 2.x + Q = 2.x$$

Allgemein kann die Funktion $y=x^n$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes nach der Darstellung der Entwicklung der Binome dargestellt werden, so dass sich die bekannte Formel für die Ableitung der parabolischen Funktionen ergibt:

$$YD = n \cdot x^{n-1},$$

Für unsere Betrachtungen ist auch interessant die Ableitung einer additiven Funktion der Gestalt

$$f = gx + hx \\ fD = ((gx+Q, +hx+Q,) - (gx + hx)) : Q \\ = (gx+Q, -gx) : Q + (hx+Q, -hx) : Q$$

die Regel von der gliedweisen Differenziation.

Der Differenzialquotient kann nach Leibniz für yDx mit $dy:dx$ dargestellt werden und ist in diesem Sinne in unserem System ein echter Quotient. Als solcher lässt er sich nach allgemeinen Regeln zu $x Dy$ umdrehen

$$dx:dy = (fx+Q, -fx) \cdot Q$$

für die Funktion $y=x^2$ ergibt sich beispielsweise das folgende: vertausche x mit y und setze $x=y^2$

$$dy:dx = ((y+Q)^2 - y^2) \cdot Q \\ = Q : (2.y.Q + Q^2) \\ = Q : (Q.2.x^2 + Q^2) \quad \text{Reihendivision ergibt} \\ = :2 :x^2 - RQ.A \\ yD = :2 :x^2$$

Andere Möglichkeiten zeigen folgende Beispiele

$$y = eLx \quad ; \quad x = e*y \\ dx:dy = e*y \\ dy:dx = :e*y = :x$$

oder

$$y = arccx \quad ; \quad x = cosy \\ dx:dy = siny \quad ; \quad dy:dx = :siny$$

es gilt

$$1 = (siny)^2 + (cosy)^2 \\ siny = (1 - (cosy)^2)^{1/2} \\ dy:dx = :(1 - x^2)^{1/2} \quad \text{Weiter gilt} \\ dy:dx = :sinarccx \quad \text{also} \\ sinarccx = (1 - x^2)^{1/2} \quad \text{Umkehrfunktion ist} \\ arccx = arcs(1 - x^2)^{1/2}$$

Voraussetzung für diesen sogenannten Kalkül, nämlich die Rechenbarkeit der Steigung in einem bestimmten Punkt A , ist lediglich, dass die Ausgangsfunktion stetig im beschriebenen Sinne ist, d.h. $fQ:Q$ rechenbar ist. Wenn $a-b$ größer als Q ist, liegt der Punkt B nicht mehr auf der Tangente im Punkt A , man erhält die Durchschnittssteigung im Intervall $|a/b|$, der Differentialquotient ergibt dann den sogenannten *Mittelwertsatz*.

Die Glieder des Differenzialquotienten heißen Differenziale. Beim Differenzial dx ist zu beachten, dass dieses nicht gleich Q ist, sondern zunächst $|x+Q - x|$, so dass beim Rechnen mit den Differenzialen, die in unserem Sinne als reine Abkürzungen zu verstehen sind, nicht in jedem Fall $dx \# Q$ gilt.

Für die Darstellung dieses Kalküls mit mehreren Variablen ist ein allgemeines Symbol zweckmäßig, möchte das bei anderen Algorithmen auch verwenden: $|D$. Nachdem die Ableitung nach x oder y gemacht werden kann, bei mehrdimensionalen Funktionen auch nach anderen Größen, ist der *Ableiter* anzugeben, er wird einfach dahinter gesetzt, z.B. ist

$$dy:dx \quad \# \quad yDx \quad \text{daraus folgt}$$

$$\begin{array}{lcl} dx:dy & = & xDy \\ xDy\#E & = & yDx\#E \end{array} \quad \text{und aus}$$

20.) e-Funktion

Ausgehend von der Euler'schen Zahl $e=(1+Q)^{:Q}$ wird eine *Exponentialfunktion* durch Potenzieren gebildet

$$\begin{aligned} (e)^*x &= ((1+Q)^{:Q})^*x \\ e^*x &= (1+Q)^{(:Q.x)} \end{aligned}$$

Die Entwicklung dieser Funktion in eine Reihe ergibt sich folgendermaßen:
Ausgehend von $e = :(t!t) Z t;Q/:Q$ wird eine Exponentialfunktion e^*x durch vollständige Induktion gebildet. Es ist $a^*1=a$, weiter ist $a^*1+1,=a^*2$, also

$$e^*2 = (:(t!t)Zt;Q/:Q)^*2.$$

Das ergibt eine quadratische Matrix mit kommutativen Gliedern der Form

$$\begin{array}{cccc} QQ & Q1 & Q2 & \& Q(:Q) \\ 1Q & 11 & Q2 & \& 1(:Q) \\ & & & & \\ :QQ & :Q1 & :Q2 & \& :Q(:Q) \end{array}$$

Diese wird trapezförmig verschoben, indem die folgende Zeile mit jeweils der nächsten Spalte beginnt

$$\begin{array}{ccccccc} QQ & Q1 & Q2 & \& Q(:Q) & & \\ 1Q & 11 & \& 1(:Q-1) & 1(:Q) & & \\ & 2Q & \& 2(:Q-2) & 2(:Q-1) & 2(:Q) & \end{array}$$

Die Spalten bis :Q werden nun unter Erweiterung der zwischen dem ersten und letzten Wert einer Spalte liegenden Glieder aufaddiert, die Additionen, die nach der :Q -ten Spalte folgenden Glieder $n(:Q-m)=0$ sind, werden dann weggelassen.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} e^*2 \# 2^*Q &:(Q!Q)+ 2^*1 :(1!1)+ 2^*2 :(2!2) \& \\ &= |2^*t :(t!t)| Z t;Q/:Q \end{aligned}$$

Das Verfahren kann beliebig fortgesetzt und für alle Zahlengattungen ausgeführt werden, es ist somit

$$\begin{aligned} e^*x \# |x^*t :(t!t)| Z t;Q/:Q \quad \text{oder} \\ e^*x &= 1 + x + :2.x^*2 + :6.x^*3 \& \end{aligned}$$

Leicht erkennbar ist, dass jedes Glied durch Differenziation das vorhergehende ergibt. Es ist damit

$$e^*xDx = e^*x$$

Jede Operation hat eine *Identitätsachse*, das ist diejenige Zahl als Operand, die für eine Operation mit einem variablen Operator zum gleichen Resultat führt. Die Differenziation ist eine spezielle operative Kombination von Subtraktion und Division. Speziell deshalb, weil sie nur auf der Identitätsachse der Addition abläuft. Die e-Funktion ist nun die Identitätsachse der Differenziation.

21.) Integral

Für viele geometrische und technische Fragen ist eine Fläche zu bestimmen. Jeder weiß, was eine Fläche ist, aber mathematisch wissen wir das nicht und müssen deshalb erst eine Definition geben. Genau wie beim Differenzieren wird zunächst nur der Einheitsfall untersucht. Die Fläche ist eine geometrische Größe, deshalb gehe von der graphischen Darstellung aus. Hierzu wird zunächst die durch die Funktion $y=x^*Q$ gegebene Gerade betrachtet. Eine Fläche dieser Funktion bis zum Punkt A soll nun das Produkt aus dem Wert des Punktes A auf der Abszisse mit dem Wert der Funktion im Punkt A sein (siehe Bild 21A).

Wird der Wert des Punktes A als Variable aufgefasst, kann eine Funktion F für die so definierte Fläche der Funktion y gesucht werden. Aus der oben genannten Definition ergibt sich diese Funktion unmittelbar als $F=x$.

Aus dieser wechselseitigen Beziehung ergibt sich für das Flächenstück im Intervall folgende Beziehung:

$$f.(a-b) = (Fx+a-b, - Fx) \quad (\text{Bild 21B}).$$

Die Funktion Fx wird als Stammfunktion bezeichnet und zeigt also bei dieser Formel die Flächenänderung der Funktion f an. Dabei gilt wie beim Diffe-

renzieren, dass die Ausgangsfunktion parabolisch vorliegen muss, das heißt, die Variable x muss in einer *parabolischen Form* in der Funktion enthalten sein, z.B. ist $y=1$ unzulässig, $y=x*Q$ ist möglich.

Untersuche nun die Flächenzuwachsfunktion der Funktion $y=x*1$, welche ihrerseits die Flächenzuwachsfunktion der Funktion $y=x*Q$ ist. Die Ausgangsfunktion wird wieder als f bezeichnet und die gesuchte Flächenzuwachsfunktion mit F . Während im ersten Fall die Flächenzuwachsfunktion additiv war, ergibt sich nun für die neue gesuchte Funktion ein additiver Verlauf. Das heißt, eine additive Zunahme des Arguments x führt zu einer Flächenvergrößerung. Die Flächenvergrößerung eines Intervalls von der Funktion f berechnet ist nicht additiv. Dies lässt sich leicht zeigen durch algebraische Ausrechnung von zwei getrennten Flächenstücken mit der oben gefundenen Beziehung, der Wert der Fläche der Funktion f im Intervall zuzüglich der Fläche im Intervall stimmt nicht mit der Fläche des Intervalls überein. Der Zuwachs des Intervalls stimmt nur, wenn $b=a$ ist, bzw. das Intervall Q ist.

Es ergibt sich demnach folgende Beziehung:

$$f_{x.Q} = (F_{x+Q} - F_x) \text{ (Bild 21C)}$$

Durch Umformung ergibt sich

$$f_x = (F_{x+Q} - F_x) : Q$$

Das ist der bereits bekannte Differenzialquotient. Durch andere Umformung ergibt sich

$$F_x = F_{x+Q} - f_x.Q$$

Da $f_x.Q$ das *Flächeninkrement* ist, bedeutet eine lineare Zunahme des Arguments der Flächenzuwachsfunktion F ebenfalls diese Fläche, dann muss die Funktion F_x die gesamten Zuwächse vom Zentrum der Funktion bis zur Stelle x darstellen. Zentrum unserer Funktionen ist Q , so dass F_x die Fläche des Intervalls unter der Ableitungsfunktion f_x darstellt.

Ausrechnen durch inverses Probieren mit dem Differenzialquotienten ergibt für die jeweiligen Flächenfunktionen beginnend mit der Funktion $y=x*Q$ folgende Reihe:

$$x*1; :2.x*2; :6.x*3 \text{ \&}$$

Die Summe dieser Funktionen unter Zufügung von 1 ergibt die bereits gefundene Funktion e^x . Die graphische Interpretation bedeutet, dass die um 1 verminderte Funktion e^x ihre eigene Fläche anzeigt. Mit unseren Begriffen wird das Zentrum der Funktion e^x von $y=1$ nach Q verschoben. Die Interpretation dieser Funktion unter dem Gesichtspunkt der Integration ergibt also, dass $e^x -1$ diejenige Funktion ist, welche an der Stelle x die Summe sämtlicher Flächen der Flächenfunktionen ausgehend von der Flächenfunktion $y=x*Q$ anzeigt. Diese letzteren sind alle wieder parabolisch. Jedes Glied der Funktion e^x ist einzeln integrierbar und führt zum folgenden Glied. Die Funktion $e^x -1$ zeigt also die Fläche der Funktion e^x für jede Stelle x an, und zwar gemessen von dem Zentrum der Funktion.

Nach der hier verwendeten Definition der Integration hat jede Integralfunktion ihr Zentrum im Ursprung, graphisch heißt das, sie hat eine Nullstelle im Ursprung und steigt dann, wenn die Fläche positiv ist, oder sinkt bei negativer Fläche. Beispielsweise zeigt der linke Ast der Funktion $e^x -1$ das negative Wachsen der Funktion e^x im zweiten Quadranten an, die Flächenfunktion sinkt immer weiter auf die Asymptote $y=-1$ (Bild 21D). Diese Flächenfunktion ist ihrerseits eine Summe bzw. Differenz von parabolischen Funktionen, die Summen können als Teilsummen E^0 , E^1 , E^2 und E^3 dargestellt werden. Das heißt, die Fläche in einem bestimmten Intervall ist in diesem Fall eine Summe von Flächen von der Anzahl $:Q$.

Die Integralfunktion ist nur ausgehend von den parabolischen Funktionen entwickelt, so dass für andere Funktionen eine Entwicklung in eine parabolische Funktion, im allgemeinen in einen Binominalausdruck, erforderlich ist. Mit Hilfe der Funktion e^x kann jede Potenzfunktion über eine Substitution dargestellt werden.

Zur Bezeichnung des Integrierens bedienen wir uns wie beim Differenzieren

entsprechender Zeichen, es ist ySx das Integral der Funktion y nach x und es gilt $ySx \# dy.dx$. Wenn nichts angegeben ist, wird nachstehend nach x integriert.

Wie sieht es nun mit den inversen Funktionen aus? Für das Radizieren lässt sich der Differenzialquotient wie gezeigt anwenden, ergibt also keine Schwierigkeit. Für die inverse Funktion des Logarithmierens ist dies nicht möglich. Es wäre daran zu denken, eine Transpositionsregel für die Spiegelung an der Achse $y=x$ anzuwenden, eine solche ist aber aus den bisher gefundenen Operationen nicht möglich. Als Ausweg bietet sich eine graphische Integration an, hier wird unter Zuhilfenahme der Anschauung ausgehend von der graphischen Gestalt der zu untersuchenden Funktion und der inversen integrierbaren bekannten Funktion die Fläche ermittelt. Dabei werden die Kongruenzsätze aus der Geometrie verwendet, die hier nicht weiter abgeleitet und als bekannt vorausgesetzt werden. Die so gewonnen Flächenfunktionen sind für Anwendungszwecke brauchbar, eine innere Logik im mathematischen System ist damit jedoch nicht begründet. Das Verfahren soll an zwei Beispielen gezeigt werden, zunächst ist gesucht die Fläche unter der Funktion eLx im Intervall $|1/x|$ (siehe Bild 21E). Diese zeigt das gesuchte Flächenstück sowie das korrespondierende der Funktion e^*x , welche das Spiegelbild um die Achse $y=x$ darstellt. Für die Fläche $|eLx|F;1/x$ gilt demnach:

$$\begin{aligned} &= x.eLx - d|e^*(eLx)|.deLx \\ &= x.eLx - eLx|'+''+^3+^{\circ}-1| \quad \text{siehe [45]} \\ &= x.eLx - (e^*(eLx) - 1) \\ &= x.eLx - (x-1) \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist also ein Rechteck abzüglich der Fläche von der Funktion $x-1$. Entsprechend dem Lösungsansatz gilt diese Formel nur für den Bereich von $|1/x|$, für den Bereich von $|Q/1|$ müsste entsprechend verfahren werden. Gesucht ist die Fläche unter der Funktion $arccx$ im Bereich von $|Q/1|$ (Bild 21F). Für die Fläche F wird hierzu das kleine schraffierte Kurvendreieck ermittelt und das Rechteck unter diesem hinzugezählt. Es gilt demnach für die Fläche $|arccx|F;Q/1$:

$$= x.arccx + |cosp|S - |\cos(arccx)|S$$

Nach Substitution von $arccx$ mit v :

$$\begin{aligned} &= x.arccx + |cosp|S - |\cosv|Sv \\ &= x.arccx + 1 - \sin v \\ &= x.arccx + 1 - \sin(arccx) \end{aligned}$$

Die herrschende Herleitung der Flächenfunktion geht aus von dem unbestimmten Integral, das mit Integrationskonstante dargestellt wird. Diese Theorie hat zwei Schönheitsfehler, der eine besteht darin, dass $d|E^3x|.dx = E^{\circ}x$ postuliert werden muss, wofür es keine logische Begründung gibt. Die zu findende Begründung ist lediglich ein Gesichtspunkt der Stetigkeit der Rechenregeln, man könnte auch sagen, weil es sonst nicht richtig herauskommt, genauso wie die herrschende Theorie mit dem Argument der Stetigkeit $A^{\circ}0 = 1$ und $0! = 1$ erklärt. Für letztere ergibt sich nach dem hiesigen Konzept zwanglos dieser Wert, für das genannte Integral jedoch ein anderer, nämlich $d|E^3x|.dx = E^{\circ}x-1$. Die sonst verwendete Integrationskonstante ist bei unserer Betrachtung lediglich eine horizontale Verschiebung und hat kein theoretisches Interesse. Die dabei auftretende verflixte 1 erlaubt andererseits eine direkte Deutung des Integralproduktes als Flächenfunktion.

Hierin liegt der zweite Schönheitsfehler der herrschenden Theorie, welche die Fläche als Summe eines unendlichen Produktes definiert, abgesehen davon, dass eine algorithmische Entwicklung eines solchen Produktes in das Integralprodukt nicht möglich ist. Zunächst taucht dort das unbestimmte Integral auf, welches die Flächenfunktion selbst nicht ist, sondern erst das bestimmte Integral. Dies sind zwei völlig verschiedene Funktionen, was eben an der vorher genannten verflixten 1 und daran liegt, dass die horizontale Verschiebung nicht getrennt behandelt wird.

Das hier vertretene Konzept führt deshalb nicht zu einer identischen Umkehr von Differenziation und Integration. Es ist ja auch schon festgestellt,

dass die Funktion e^x die Identitätsachse der Differenzialrechnung ist, eine Identitätsachse für die Integrationsrechnung lässt sich auf diese Weise jedoch nicht finden. Das gilt übrigens auch für die herrschende Theorie der Fläche als bestimmtes Integral, weshalb auch hier von einer echten Umkehrung nicht gesprochen werden kann.

22.) Transzendente

Die Zusammenhänge der trigonometrischen und exponentiellen Funktionen lassen sich wie folgt darstellen. Ausgehend von der Exponentialfunktion

$$Ex \quad \# \quad e^x = |x^t : (t!t)| \quad Z \quad t; Q/:Q$$

werden vier *Teilsommen* durch Spaltung gebildet

$$E^0x \quad \# \quad x^Q :!Q + x^4 :!4 + \& \quad [01]$$

$$E^1x \quad \# \quad x^1 :!1 + x^5 :!5 + \& \quad [02]$$

$$E^2x \quad \# \quad x^2 :!2 + x^6 :!6 + \& \quad [03]$$

$$E^3x \quad \# \quad x^3 :!3 + x^7 :!7 + \& \quad [04]$$

(siehe Bild 22). Jede Teilsomme besitzt $:Q:4$ Glieder, die Teilsommen können deshalb eindeutig aufeinander abgebildet und zu regelmäßigen quadratischen Matrizen angeordnet werden, so dass Summenbildung und Produktbildung unbeschränkt möglich ist.

Vereinfacht geschrieben ist $E^0x = ^0$ usw., $E^0(a \cdot x) = ^0a$ usw., sonst

$$E^0(a+b) = ^0a+b.$$

Es folgt aus [01-04] unmittelbar:

$$e^x = ^0 + ^1 + ^2 + ^3 \quad [05]$$

$$e^xa = ^0a + ^1a + ^2a + ^3a \quad [06]$$

$$^0- = ^0; \quad ^1- = ^1; \quad ^2- = ^2; \quad ^3- = ^3 \quad [07]$$

$$^0i = ^0; \quad ^1i = ^1; \quad ^2i = ^2; \quad ^3i = ^3 \quad [08]$$

$$^0Q = 1; \quad ^1Q = Q; \quad ^2Q = Q; \quad ^3Q = Q \quad [09]$$

Es folgt mit [07] [08] und $A^*-B \# :A^*B$ z.B.

$$e^{-x}, \quad = ^0 - ^1 + ^2 - ^3 = :e^x \quad [11]$$

$$e^{ix} \quad = ^0 + ^1i - ^2 - ^3i^3 \quad [12]$$

$$:e^{ix} \quad = ^0 - ^1i - ^2 + ^3i^3 \quad [13]$$

$$-i:e^{ix} \quad = -i^0 - ^1 + ^2i + ^3 \quad [14]$$

$$\text{Es gilt} \quad C^*A+B, = C^*A \cdot C^*B \quad [15]$$

daher auch

$$:e^{ia+ib}, = ^0a+b, + ^1a+b, - ^2a+b, - ^3a+b,$$

$$= (^0a-i^1a-^2a+i^3a) \cdot (^0b-i^1b-^2b+i^3b) \quad \text{und}$$

$$e^{ia-ib}, = ^0a-b, + ^1a-b, - ^2a-b, - ^3a-b,$$

$$= (^0a+i^1a-^2a-i^3a) \cdot (^0b-i^1b-^2b+i^3b)$$

daraus folgt nach Ordnung sortiert und gekürzt

$$^0a-b, = + ^0a^0b + ^1a^3b + ^2a^2b + ^3a^1b \quad [16]$$

$$^1a-b, = + ^0a^1b + ^1a^0b + ^2a^3b + ^3a^2b \quad [17]$$

$$^2a-b, = + ^0a^2b + ^1a^1b + ^2a^0b + ^3a^3b \quad [18]$$

$$^3a-b, = + ^0a^3b + ^1a^2b + ^2a^1b + ^3a^0b \quad [19]$$

Aus diesen Sätzen folgen leicht abzuleitende Folgesätze.

$$\begin{aligned} \text{Es sei } \S shx \# \quad & ^1+^3 \\ & = (^0+^1+^2+^3 - (^0-^1+^2-^3)):2 \\ & = (e^x - e^{-x}):2 \end{aligned} \quad [20]$$

Genauso ist abzuleiten

$$\begin{aligned} \S sinx \quad \# \quad & ^1-^3 = (e^{ix} - e^{-ix}):2i \\ \S coshx \quad \# \quad & ^0+^2 = (e^x + e^{-x}):2 \\ \S cosx \quad \# \quad & ^0-^2 = (e^{ix} + e^{-ix}):2 \\ \S schx \quad \# \quad & (^1+^3) = 2:2:(^1+^3) = 2:(2^1+2^3) \\ & = 2:(^1+^3+^1+^3) = 2:(^0+^1+^2+^3 - ^0+^1-^2+^3) \\ & = 2:(e^x - e^{-x}) \end{aligned} \quad [21]$$

Entsprechende Formeln ergeben sich für

$$\S cschx \# :(^0+^2); \quad \S thx \# :(^1+^3):(^0+^2)$$

Es kann gezeigt werden, dass die mit § definierten Funktionen mit den bekannten trigonometrischen Funktionen *Sinus* von $x \# sinx$ usw. alle charak-

teristischen Gesetze gemeinsam haben. Es ist

$$e^{ix} = e^{i + i^3 + i^5 + \dots} = (\circ - ") + i(' - ^3) = \cos x + i \sin x \quad [22]$$

$$1 = e^{ix} : e^{ix} \\ \text{nach [12,13]} = (\circ + i' - " - i^3) \cdot (\circ - i' - " + i^3) \\ = \circ\circ - 2\circ" + i' - 2i^3 + " + ^3^3 \\ = (\circ - ")^2 + (' - ^3)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x \quad [23]$$

$$\text{und} \quad 1 = e^{ix} : e^{ix} = \cosh^2 x - \sinh^2 x \quad [24]$$

Es ist $\cos(a+b)$,

$$= \circ a + -b, \quad - "a + -b, \quad \text{nach [17,19]} \\ = (\circ a \circ b + - 'a^3 b + "a"b + - ^3 a' b) - (\circ a"b + - 'a' b + "a \circ b + - ^3 a^3 b) \\ = (\circ a - "a) \cdot (\circ b - "b) + ('a - ^3 a) \cdot ('b - ^3 b) \quad [25] \\ = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\text{und} \quad \sin(a+b), \\ = (+ - \circ a' b + 'a \circ b + - "a^3 b + ^3 a"b) - (+ - \circ a^3 b + 'a"b + - "a' b + ^3 a \circ b) \\ = + - (\circ a - "a) \cdot ('b - ^3 b) + (\circ b - "b) \cdot ('a - ^3 a) \quad [26] \\ = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

Aus [9] [20] folgt

$$1 = \circ Q - "Q = \cos Q \quad [27]$$

$$\text{mit [23]} \quad = (1 - ('Q - ^3 Q)^2)^{1/2} \\ = 1 - ('Q - ^3 Q) \\ Q = 'Q - ^3 Q = \sin Q \quad [28]$$

Es gibt eine Zahl p , für die gilt

$$Q = \circ p - "p = \cos p \quad [29]$$

$$\text{mit [23]} \quad = (1 - ('p - ^3 p)^2)^{1/2} = 1 - ('p - ^3 p)^2$$

$$\text{also} \quad 1 = 'p - ^3 p = \sin p \quad [30]$$

Die Periodizität von $\cos x$ und $\sin x$ mit der Periode $4p$ lässt sich mit [25] [26] zeigen, z.B.

$$\sin p + p, = (\circ p - "p) \cdot ('p - ^3 p) + (\circ p - "p) \cdot ('p - ^3 p) \\ \text{nach [29]} \quad = Q \cdot 1 + 1 \cdot Q = Q \quad [31]$$

$$\cos p + p, = Q \cdot Q - 1 \cdot 1 = -1 \quad [32]$$

$$\sin 2p + p = Q \cdot Q + (-1) \cdot 1 = -1$$

usw.

Die Periodizität von e^{ix} mit $4p$ ergibt sich wie folgt

$$e^{iQ} = + \circ Q + i'Q - "Q - i^3 Q = 1 \quad [33]$$

$$[09] \quad e^{ip} = (\circ p - "p) + i('p - ^3 p) = i1 \quad [34]$$

$$[29,30] \quad e^{i2p} = i^2 = -1 \quad [35]$$

$$e^{i4p} = i^4 = 1 \quad [36]$$

$$\text{Nach [11]: } e^{ip} = \circ p - 'p + "p - ^3 p$$

$$[07] \quad = \circ - p, + ' - p, + " - p, + ^3 - p,$$

$$= \circ iip + 'iip + "iip + ^3 iip$$

$$[06] \quad = (\circ ip + 'ip + "ip + ^3 ip) \cdot i$$

$$[08] \quad = (\circ p - "p) + i('p - ^3 p) \cdot i$$

$$[29,30] \quad = (Q + i \cdot 1) \cdot i = i \cdot i \quad [37]$$

Die Zahl p hat also die Eigenschaft der Hälfte der *Kreiszahl Pi* und ist damit als Kreisurzahl anzusehen.

23.) Transfinite

Bei Operationen sind Werte mit Q und $:Q$ möglich, so dass auch die entsprechenden Werte bei Operationen rechenbar sind. Während das Rechnen mit Q im allgemeinen keine Probleme aufwirft, kann es beim Rechnen mit $:Q$ durchaus schwieriger werden. Es kann vorkommen, dass $:Q$ kombiniert auftaucht und sich die Frage stellt, wie ist damit zu verfahren. Wenn $:Q$ das Finite ist, nämlich die letzte große rechenbare Zahl, so sind Kombinationen von $:Q$ transfinit, das Transfinite muss jedoch zur Erreichung eines Ergebnisses zum Weiterrechnen auf das Finite zurückgeführt werden.

Für die weiteren Überlegungen betrachte zunächst die Funktion $y=(1+:x)^x$,

deren graphisches Abbild in Bild 23A dargestellt ist. Wie leicht zu sehen ist, ergibt sich an der Stelle +1 der Wert 2, an der Stelle +Q der Wert +1 und ebenfalls an der Stelle -Q +1. An der Stelle -1 ergibt sich:

$$y = (1 + :(-1))^{*-1} \\ = : (1-1) = :Q$$

Das Ergebnis ist finit und von keiner Besonderheit. An der Stelle +:Q ergibt sich die bereits bekannte Zahl e :

$$= (1 + :(:Q))^{*:Q} \\ = (1 + Q)^{*:Q} = e$$

Genauso an der Stelle -:Q :

$$= (1 + :(-:Q))^{*-:Q} \\ = : (1 - Q)^{*:Q}$$

Nach Division von 1:(1-Q)

$$= (1 + Q)^{*:Q}$$

Entsprechend dem Aufbau unseres Zahlensystems ist die Abarbeitung zu machen, d.h. zunächst die Potenzklammer auszurechnen und dann erst kann Q aufgelöst werden. Außerdem sind Dividi zu beseitigen soweit möglich, dies zeigt folgendes Beispiel. Untersucht wird die Funktion

$$y = (x^2 - 1) : (x-1) \quad (\text{Bild 23B})$$

an der Stelle x#1 , und negiere zunächst die Regel:

$$= (1^2 - 1) : (x-1) \\ = (Q) : (Q) = 1$$

Bei Befolgung der Kürzungsregel ergibt sich ganz einfach:

$$y = x + 1$$

An der Stelle x#1 gilt y=2 .

Bei Verwendung der ungekürzten Formel ergibt sich jedoch der nach üblicher Auffassung unstetige Wert 1. Dieser ist falsch, da bei der Rechnung mit Potenzen von 1 die Dimension verloren geht. Man kann sich in solchen Fällen behelfen, indem man die Stelle 1 um das *Inkrement* Q vermehrt oder vermindert, was zum rechtseitigen oder linksseitigen Wert führt, beispielsweise linksseitiger Wert an der Stelle x#1 :

$$y = ((1-Q)^2 - 1) : ((1-Q) - 1) \\ = (-2Q + Q^2) : -Q = 2 - Q$$

Möchte nun zurückkehren zur Funktion y=e*x, an der Stelle Q ergibt sich:

$$y = 1 + Q + :!2.Q^2 + :!3.Q^3 \& \\ = 1 + Q + Q.A + Q.B \& \\ = 1 + 1-1 + A-A + B-B \& = 1$$

Entsprechend an der Stelle -Q ergibt sich (Bild 23B):

$$= 1 - Q + :!2.Q^2 + :!3.Q^3 \& = 1$$

An der Stelle -:Q ergibt sich:

$$= :(e^{*:Q}) \\ = 1 - :Q + :!2:Q^2 - :!3:Q^3 \&$$

Man kann nunmehr die gewonnene Summe des Dividus aufteilen in einen Summanden :Q und den Rest, bezeichne ihn mit G . Hierunter ist eine große Zahl zu verstehen und es ist zu folgern

$$y = :(:Q + G) \\ = :(1:Q + Q:Q.G) \\ = :((1 + Q.G):Q) \\ = :((1 + G-G):Q) = :(:Q) = Q$$

als formales Ausrechnungsergebnis. Das Ergebnis erscheint auch richtig, weil bereits der Reziprokwert von :Q die kleinste Zahl Q ergibt und eine kleinere Zahl in unserem System nicht vorhanden ist. Die Richtigkeit dieser Überlegung kann auch durch Division und Entwicklung in eine Reihe des so gewonnenen Ergebnisses bestätigt werden, hierbei muss die größere Zahl vorangestellt werden, was G ist, da sie transfinit ist und damit größer als :Q

$$1:(G + :Q) = :G - :G^2:Q + :G^3:Q^2 \&$$

Für :G#Q = Q - Q.Q:Q + Q.Q.Q:Q & =0

Das Ergebnis ist also, dass e* -:Q zum Wert Q entwickelt werden kann. Umgekehrt gilt das selbstverständlich nicht.

Auf die Werte der Teilsummen wirkt sich das wie folgt aus, es gilt (Bild 23

D)

$$\begin{aligned} e^{*}:Q &= |E^{\circ} - E' + E'' - E^3|;:Q \\ &= (E^{\circ}:Q + E'':Q) - (E':Q + E^3:Q) = 0 \\ &= \cosh:Q - \sinh:Q = 0 \end{aligned}$$

Interessant wäre nun, wie groß eine Teilsumme E an der Stelle :Q ist, hierzu bilde ein Gleichungssystem mit vier Unbekannten und lösen es auf. Dabei verwende bereits bekannte Beziehungen, wobei die Formeln A und B nur für die Stelle :Q gelten. Für die Stelle :Q gilt

$$\begin{aligned} \circ + ' + '' + ^3 &= :Q & [A] \\ \circ - ' + '' - ^3 &= Q & [B] \\ (\circ - '')*2 + (' - ^3)*2 &= 1 & [C] \\ (\circ + '')*2 - (' + ^3)*2 &= 1 & [D] \end{aligned}$$

Addition von [A] und [B] sowie [C] und [D] ergibt

$$\begin{aligned} 2.\circ + 2.^3 &= :Q + Q \\ 2.\circ.\circ + 2.^3.^3 &= 2 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhält man nach Elimination von Q

$$E^{\circ}:Q = :4:Q \quad \text{und entsprechend}$$

$$E':Q = :4:Q ; E'':Q = :4:Q ; E^3:Q = :4:Q$$

Da hierbei $e^{*}:Q = :Q$ unter Weglassung des transfiniten Teiles gesetzt wurde, gelten die obigen Werte nur unter dieser Prämisse.

24.) Flächenfunktion

Hatten wir bisher die Entwicklungen der transzendenten Funktionen elementar vorgenommen, ergeben sich bei Anwendung der höheren Rechnungsarten weitere einfache Zusammenhänge:

Als Ableitungen ergeben sich nach gliedweisem Differenzieren von [01-05]

$$|^3|D = '' ; |''|D = ' ; |'|D = \circ ; |^{\circ}|D = ^3 ; [38]$$

Daraus folgt

$$|e^{*}x|D = \circ + ' + '' + ^3 = e^{*}x \quad [39]$$

$$|:e^{*}x|D = -\circ + ' - '' + ^3 = -:e^{*}x \quad [40]$$

$$|\cos x|D = -(' - ^3) = -\sin x \quad [41]$$

$$|\sin x|D = \circ - '' = \cos x \quad [42]$$

$$\begin{aligned} |ctgx|D &= d(\circ - '') : (' - ^3) : dx \\ &= (-(' - ^3).(' - ^3) - (\circ - '').(\circ - '')) : (' - ^3)^2 \end{aligned}$$

$$\text{nach [23]} = -:(' - ^3)^2 = -: \sin^2 x \quad [43]$$

$$\begin{aligned} |tgx|D &= |(' - ^3) : (\circ - '')|D \\ &= :(\circ - '')^2 = : \cos^2 x \quad [44] \end{aligned}$$

Integrationen sind nach den Regeln über gliedweises Integrieren auszuführen, dabei ist

$$|e^{*}x|S = |(\circ + ' + '' + ^3)|S = e^{*}x - 1 \quad [45]$$

$$|\cos x|S = |(\circ - '')|S = ' - ^3 = \sin x \quad [46]$$

$$|\sin x|S = |(' - ^3)|S = '' - (\circ - 1) = -\cos x + 1 \quad [47]$$

Unter bestimmten Integralen wird herkömmlicherweise die Flächenfunktion mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Integralrechnung verstanden, die sich als Differenz des Wertes des unbestimmten Integrals im Anfangs- und Endpunkt der Fläche ergibt. Bei uns ist das gewonnene Integral bereits die *Flächenfunktion* selbst, und zwar gerechnet vom Zentrum der Funktion, so dass sich die Fläche an einem Punkt a für die Variable x unmittelbar ergibt. Im Gegensatz zu der üblichen Definition des unbestimmten Integrals ist hier keine Integrationskonstante vorhanden. Der genannte Hauptsatz bedeutet damit hier nur den banalen Fall, dass die Fläche zwischen zwei Punkten a und b ermittelt wird, also eine reine Differenz zwischen zwei Flächen. Dies ist für unsere theoretischen Überlegungen uninteressant.

Die Flächenbestimmungen für die parabolischen Funktionen lassen sich leicht ausführen, für die Potenzfunktionen müssen Zusatzüberlegungen angestellt werden. Es ist die Ableitung von $e^{*}x$ an der Stelle -:Q :

$$|e^{*}:Q|D = :Q . e^{*}:Q-1, = :Q . A \quad [48]$$

Und analog

$$\begin{aligned} |e^{*}:Q|D &= -:Q . e^{*}:Q-1, = -:(:Q . e^{*}:Q-1,) \\ &= -Q . A = -A+A = 0 \quad [49] \end{aligned}$$

Nach [39] ist der Wert der Ableitung an einer bestimmten Stelle gleich dem

Funktionswert an dieser Stelle, also auch

$$e^{*-}:Q = 0 \quad [50]$$

Es gilt daher $e^{*-}:Q = | \begin{smallmatrix} +^{\circ} + ' + '' + ^3 \end{smallmatrix} |; -:Q$

$$\text{und mit (07)} \quad = | (^{\circ} + '') - (' + ^3) |; :Q \\ = \cosh:Q - \sinh:Q = 0 \quad [51]$$

Für die Fläche F unter der linkseitigen e-Kurve gilt

$$|e^*x|F; -:Q/Q =$$

$$|e^*x|S; -:Q = - (| \begin{smallmatrix} + ' + '' + ^3 + ^{\circ} - 1 \end{smallmatrix} |; -:Q) \\ = - (| \begin{smallmatrix} - ' + '' - ^3 + ^{\circ} \end{smallmatrix} |; :Q) + 1 = 0 + 1 = 1 \quad [52]$$

Oder Fläche F zwischen sinh und cosh im I. Quadranten (Bild 23D):

$$|\cosh x - \sinh x|F; Q/:Q =$$

$$|\cosh x - \sinh x|S; :Q = :Q | \begin{smallmatrix} ' + ^3 - ('' + ^{\circ} - 1) \end{smallmatrix} | \\ \text{mit [51]} \quad = 0 - (-1) = 1 \quad [53]$$