

### 33.) Pole

Die Verknüpfung von Urgerade und Messgerade kann arithmetisch als Funktion dargestellt werden. Der Standpunkt entspricht dem Ursprung in der üblichen Darstellung und stellt das eine Ende der Geraden dar. Die übliche Anschauung der Geraden entspricht einem *Strahl*, einer Geraden mit Anfang, aber ohne Ende. Die Seite ohne Ende wird mit dem unbestimmten Begriff "unendlich" umschrieben, weil so getan wird, als könne man mit jeder Größe beliebig fortfahren. In unserem System ist dagegen jede Gerade nur soweit vorhanden, als ein Punkt erzeugt wird. Genauso ist eine Zahl nur soweit vorhanden, als eine Operation diese konkret angibt. Man kann also nicht gedacht beliebig weit gehen, sondern nur so weit, wie man konkret denken kann. Wir haben jedoch zum Ursprung einer Zahlgeraden  $Q$  den Reziprokwert  $:Q$  zugelassen. Soweit die Zahlgeraden arithmetisch durch Funktionen dargestellt werden, entspricht der Punkt  $:Q$  der üblichen Bezeichnung *Pol*. Es ist daher zu klären, was dies in unserer begrenzten Anschauung bedeutet. Für den Begriff *Pol* einer Funktion werden die verschiedensten Definitionen geboten, z.B. Häufungspunkte einer Funktion. In unserem Sinne ist *Pol* ein Wert, bei dem die Funktion den Wert  $:Q$  als Rechenergebnis annimmt. Eine Funktion kann demnach an einem *Pol* durchaus transfinit sein. Wenn das Transfinite auf die Zahl  $:Q$  zurückgeführt werden kann, liegt ein *Pol* vor. Z.B. hat die Funktion  $y=x$  an der Stelle für  $x$  von  $+:Q$  den Wert für  $y$  von  $+:Q$ . Der Wert der Funktion  $e^x$  an der gleichen Stelle ist transfinit und wird erst nach Rückführung ins Finite  $:Q$ .

Der *Pol* kann bestehen sowohl in Bezug auf die Variable  $x$  als auch die Variable  $y$ . Im Beispiel der Funktion  $y=x$ , die symmetrisch zur  $x$ -Achse ist, ist der  $x$ -*Pol* und der  $y$ -*Pol* gleich.

Zur Anschauung eines *Pols* kann das graphische Bild der Funktion gezeichnet werden unter Benützung des Dividus der betreffenden Variablen, das ergibt in bezug auf die Multiplikation inverse Funktion. Am graphischen Bild ist erkennbar, dass die Funktion  $y=:x$  an der Stelle  $Q$  einen  $x$ -*Pol* und einen  $y$ -*Pol* hat. Beim  $x$ -*Pol* wird der Wert von  $x$  zu  $:Q$ , beim  $y$ -*Pol* der Wert von  $y$  entsprechend (siehe Bild 33A). Es wird nun die Dividusfunktion gebildet  $y=(x) = x$ . Dies Verfahren kann auch als Umkehrung der Werte der Abszisse gedeutet werden (Bild 33B). Die Dividusfunktion ergibt nun die Gerade  $y=x$ , der *Pol* ist an der Null-Stelle im Ursprung ersichtlich. Die Kurve schneidet den Ursprung im Winkel von  $45^\circ$ , was bedeutet, dass ein finiter *Pol* vorliegt.

Das Verfahren kann wiederholt werden, d.h. wenn die Funktion  $y=x$  untersucht wird, ergibt das Bild der Dividusfunktion  $y=:x$  im graphischen Bild keine Null-Stelle, weil diese außerhalb jeglichen Bildbereiches liegt. Der dort befindliche *Pol* kann in den Ursprung herangeholt werden durch nochmalige Bildung der Dividusfunktion, wodurch wiederum die Funktion  $y=x$  entsteht und der *Pol* im Ursprung erkennbar wird.

Für das Bild der Funktion  $y=x^2$  (Bild 33C) beispielsweise ergibt sich nach zweimaliger Spiegelung um die  $x=1$ -Achse wieder die Funktion  $y=x^2$  mit dem *Pol* im Ursprung. Die Kurve mündet in den Ursprung nicht mehr im Winkel von  $45^\circ$  ein. Die Tangente im Punkt  $Q$  ist Null, erst die zweite Ableitung, also die Steigung der Tangente selbst, hat einen Wert größer  $Q$ . Mit Hilfe der Ableitungen der *Pole* lässt sich daher ein Maß für den *Pol* bestimmen. Die Größe des Transfiniten soll als *Mächtigkeit* in Anlehnung an die Mengenlehre bezeichnet werden, die *Mächtigkeit* selbst wird nach der Zahl der benötigten Spiegelungen und derjenigen Ableitung bemessen, die erstmals nicht Null wird. Ein Untermaß ist dann der Wert dieser Ableitung selbst, die mit Trennzeichen abgetrennt wird. Die *Mächtigkeit* des  $x$ -*Pols* für die Funktion  $y=x^2$  an der Stelle  $+:Q$  beträgt also  $2/2$ . Entsprechend wäre die *Mächtigkeit* für die Funktion  $y=x^3$   $2/3$ , die *Mächtigkeit* für die Funktion  $y=x$  beträgt demnach 1. Die Zahl der benötigten Spiegelungen wird vorangestellt.

Die *Mächtigkeit* des  $x$ -*Pols* für die Funktion  $e^x$  (Bild 33D) wird wie folgt ermittelt: es wird die Dividusfunktion  $e:x$  gebildet, diese zeigt den *Pol* an der Stelle  $x=Q$  außerhalb des Bildes, es wird deshalb der  $y$ -Dividus gebildet, nämlich die Funktion  $e*:x$ . An der Stelle  $Q$  hatte diese den Wert  $e*:Q=0$ , also eine Null-Stelle.

Der x-Pol der Funktion  $e^{-(x^2)}$ , wird dargestellt durch die Dividusfunktion  $e^{-(x^2)}$ , siehe Bild 33E.

Die Teilfunktionen werden ebenso behandelt, z.B.  $\sinh x$ , hier wird zunächst zur Feststellung des x-Poles  $\sinh: x$  ermittelt, sodann der y-Dividus  $\sinh: x$  (siehe Bild 33F).

Bei den zyklischen Funktionen ist auf diese Weise kein eindeutiges Bild zu erzielen, z.B. ergibt die Dividusfunktion von  $\cos x$  die Funktion  $\cos: x$  (Bild 33G). Hier ergibt sich eine *Oszillation* im Ursprung im Bereich von  $+1 / -1$ . Die in Bezug genommenen bildlichen Darstellungen sind in üblicher Weise in orthogonalen kartesischen Koordinaten dargestellt und darauf bezieht sich die Erklärung. Das soll nicht heißen, dass diese Darstellung und damit das Bild der Funktionen und auch die Folgerungen zwangsläufig sind. Die Auswirkungen des Koordinatensystems sind noch zu untersuchen.

### **34.) Teilsummenkombinationen**

Wir haben gesehen, dass durch andere Packungen als orthogonale Plikationen auch andere Zahlen und damit andere Messgeraden als orthogonale gebildet werden können. Das gleiche gilt auch für kombinierte Operationen. Entsprechend den Operationen können damit auch andere Funktionen gebildet werden. Verfolge das am Beispiel der Teilsummen, welche schon näher untersucht sind.

Weitere Kombinationen mit Teilsummen ergeben sich durch monoplukative Verbindung der Teilsummen. So lassen sich mit den bekannten Funktionen Kosinus und Sinus folgende weitere periodische Funktionen bilden:

$$\begin{aligned} & (^{\circ}-'') + ('^{-3}) \\ & (^{\circ}-'') - ('^{-3}) \end{aligned}$$

Das Bild dieser Funktionen ähnelt den bereits bekannten Funktionen Kosinus und Sinus.

Eine subtraktive Kombination benachbarter Teilsummen ergibt neue bisher nicht untersuchte Funktionen. Vier Kombinationen sind möglich:

$$(^{\circ}-') ; ('^{-''}) ; ('^{-3}) ; (^{3-^{\circ}})$$

Diese ergeben die in Bild 34 dargestellten Kurven. Deren Haupteigenschaft ist, dass ihre Summe an jeder Stelle Null ergibt:

$$(^{\circ}-') + ('^{-''}) + ('^{-3}) + (^{3-^{\circ}}) = 0$$

Durch additive Kombination dieser neuen Funktionen lässt sich Sinus und Kosinus darstellen:

$$\begin{aligned} (^{\circ}-') + ('^{-''}) &= (^{\circ}-'') = \cos \\ ('^{-''}) + ('^{-3}) &= ('^{-3}) = \sin \\ ('^{-3}) + (^{3-^{\circ}}) &= ('^{-^{\circ}}) = -\cos \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft dieser neuen Funktionen ist, dass jede Funktion die Steigung der nachfolgenden Kurve anzeigt:

$$\begin{aligned} |^{\circ}-'|D &= (^{3-^{\circ}}) \\ |'^{-''}|D &= (^{\circ}-') \\ |'^{-3}|D &= ('^{-''}) \\ |^{3-^{\circ}}|D &= ('^{-3}) \end{aligned}$$

Eine entsprechende Eigenschaft besteht bezüglich der Fläche, welche von der Kurve und der Abszisse eingeschlossen wird:

$$\begin{aligned} |^{\circ}-'|S &= ('^{-''}) \\ |'^{-''}|S &= ('^{-3}) \\ |'^{-3}|S &= ^3 - (^{\circ}-1) = (^{3-^{\circ}}) + 1 \\ |^{3-^{\circ}}|S &= (^{\circ}-1) - ' = (^{\circ}-') - 1 \end{aligned}$$

Die nachfolgende Kurve zeigt jeweils die Fläche der vorhergehenden an, wobei zwei Flächenfunktionen jedoch verschoben sind. Das ergibt sich auch aus der hier verwendeten Definition des Integrals als direkte Flächenfunktion.

Die Kurven schlängeln sich im Intervall  $|+1/-1|$  um die positive Abszisse, im Anfang des Bereichs sind sie nicht periodisch. Bei  $+:Q$  können sie zu Null entwickelt werden. Für negative Argumente nehmen die Kurven große Beträge im Positiven oder Negativen an, die zwischen der e-Funktion und den Teilfunktionen jeweils liegen.

### **36.) Kreisel**

Mit dem bisherigen Werkzeug ist es möglich, geradlinige Strukturen zu

erzeugen. Im zweidimensionalen Bereich gibt es mit je einem Messpunkt nur gleichseitige oder rechtwinklige Systeme, diese bezeichne deshalb als Ursysteme, erst mit mehr Punkten lassen sich auch andere Strukturen erzeugen, dies sind dann abgeleitete Systeme. Die Verlängerung der einzelnen Punkte in der Flucht ergibt Linien, die zum Messen benützt als *Koordinaten* bezeichnet werden. Die rechtwinkligen oder gleichseitigen Koordinaten sind entsprechend als *Urkoordinaten* zu bezeichnen.

Punkte, welche in einer Beziehung zueinander stehen und nicht in der Flucht liegen, nach unserer Auffassung Punktlinien, sollen *Kurven* heißen. Sie können durch ein Koordinatensystem dargestellt werden, für eine Kurve in einer Ebene werden zwei Koordinaten benötigt.

Die Koordinaten können ihrerseits Kurven sein, zur Messbarkeit bedarf es dann jedoch immer einer Transformation von einem Urkoordinatensystem. Krumme Koordinaten können daher nur als abgeleitete Koordinaten Verwendung finden. Die übliche Analysis, die arithmetische Beschreibung der Geometrie, verwendet als Urkoordinaten nur rechtwinklige Urkoordinaten, sämtliche andere Koordinatenformen sind daraus abgeleitet. Traditionell werden Kurven als nicht gerichtet aufgefasst, zur Beschreibung gerichteter Figuren bedient man sich der *Vektoren*, das Maß ist hier der Einheitsvektor. Auch sämtliche gebräuchlichen Vektorensysteme basieren auf einem orthogonalen linearen Dreibein und sind daher aus Urkoordinaten abgeleitet. Nach unserer Anschauung ist eine echte ursprüngliche Krummlinigkeit nicht möglich, sie ist entgegen dem Anschein bisher auch nicht echt entwickelt.

Unternimm im nachfolgenden den Versuch, eine häufige Kurve in unser System einzubetten, nämlich den Kreis. Jeder weiß, was ein Kreis ist, er braucht nur die Hand auszustrecken und sich auf seinen Absätzen umzudrehen, entsprechend knüpfe die Bestimmung des Kreises bei unserem System an den Standpunkt an, dieser entspricht dem Mittelpunkt in der üblichen Darstellung. Die Peripherie, welche durch die sich bewegende Hand dargestellt wird, ist dadurch bestimmt, dass der Maßpunkt der Urgeraden im Sinne einer Winkelmessung gedreht wird. Wir stoßen dabei auf die Ausführungen zum rechten Winkel und erhalten sofort vier messbare Punkte sowie weitere acht Punkte bei Verwendung von gleichseitigen Dreiecken (Bild 36A). Die dort eingezeichneten Linien stellen nur die Zuordnung dar, die Existenz einer durchgehenden krummen Linie ist damit nicht gegeben. Damit stellt sich die Frage nach dem Maß des Kreisumfangs als einer gedachten krummen Linie. Da dies keine definierte Linie ist, kann sie so nicht bestimmt werden.

Bekanntlich können mit einer Vergrößerung der Maßzahlen nach diesem Verfahren spitzere Dreiecke gebildet werden, die zu dem bereits von den alten Griechen angewandten Exhaustionsverfahren für den Kreisumfang führen. Eine endgültige Bestimmung des Kreisumfangs in der Maßzahl ist jedoch mit keiner Methode möglich, die sogenannte *Inkommensurabilität*. Nach unserer Auffassung ist sie schon gar nicht denkbar, alle Methoden sind nur Näherungsverfahren, weil eine durchgehende Linie nicht erzeugt werden kann, wie das auch bei Geraden der Fall ist. Das *Unendliche* gibt es bei uns nicht, also sind auch die Punkte nicht beliebig vermehrbar und damit die Lücken nicht zu füllen. Man kann sich den Kreis als eine Uhr mit Ziffernblatt vorstellen, bei der die 12 Stunden als Marken sichtbar sind, sowie der Mittelpunkt, mehr nicht. Des weiteren ergibt sich daraus, dass der Kreis auch aus dem Mittelpunkt besteht, nicht nur aus den Peripheriepunkten. In einem rechtwinkligen Urkoordinatensystem haben wir lediglich vier Peripheriepunkte und den Mittelpunkt, also fünf Punkte, auf diesen *Urkreis* beschränke die folgenden Betrachtungen.

Für den Urkreis kann man also bestimmen, dass der Kreis ein unbestimmter Winkel dergestalt ist, dass vom Standpunkt aus der rechte horizontale Schenkel in der Ebene feststeht und der linke beweglich, also variabel ist. Der rechte Schenkel soll *Radius* heißen, sein Maß soll das Maß des Kreises sein. Wegen der Inkommensurabilität des Radius im Verhältnis zur Peripherie ist diese nur für einzelne Punkte messbar. Die vier messbaren Punkte auf der Peripherie teilen die Quadranten ab, verfahren, wie schon bei der grafischen Darstellung erläutert, mit der Bezifferung entgegen dem Uhrzei-

gersinn, was ebenfalls willkürlich ist, aber die gebräuchliche Übung darstellt. Vom Drehsinn her ergibt sich damit ein Linkssystem, der Uhrzeigersinn wäre ein Rechtssystem. Die Quadranten haben demnach die Bezeichnung wie in Bild 36B. Die Länge des Bogens in einem Quadranten bezeichne als  $p$  und messe in der Gestalt des angegebenen Pfeiles. Das Linkssystem hat für diejenigen, die auf der nördlichen Halbkugel leben, den Nachteil, dass es entgegen der natürlichen, durch die Sonne vorgegebenen Anschauung läuft. Mit der Vorstellung, dass der Winkelschenkel wachsend von einem Punkt in einer bestimmten Richtung umläuft, bekommt der Kreis eine Bewegung, den Drehsinn und soll *Kreisel* heißen. Der wie oben definierte Kreisel wird vom Radius aus gemessen und soll deshalb *r-System* genannt werden. Arithmetisch lässt sich mit der Größe  $p$  der Umfang des Kreises bei einer Radiuslänge von 1 zu  $4 \cdot p$  errechnen. Die Zahl  $p$  wiederum lässt sich über die Teilsummen nach dem dort beschriebenen Algorithmus näherungsweise bestimmen.

Anstatt den Radius zum Maß zu nehmen, kann der Kreis auch über die Länge der Peripherie in dem angegebenen Sinne bestimmt werden, in diesem Fall ist der Radius bei einer Maßeinheit von 1 inkommensurabel, arithmetisch gesehen ergibt sich für den Radius dann  $r = 1 : 4 : p$ . Dieses System soll *u-System* heißen, weil es später für die Betrachtungen der Zeit, welche mit  $u$  abgekürzt wird, benötigt wird. Das u-System ist also ein Kreisel, bei dem der Umlauf als Maß genommen wird. Das u-System hat im Ursprung daher lediglich einen Punkt, sein Winkelschenkelumlauf beträgt 1, die Größe eines Radius ist nicht kommensurabel (siehe Bild 36C).

Der *Kreis* ist nun diejenige Figur, bei der dem Kreisel der Drehsinn genommen wird. Es ist die gleiche Begriffsbildung wie beim Abstand, bei dem ebenfalls die Richtung keine Rolle spielt, also Ferne und Nähe zusammenfallen.

### 37.) u-Diagramme

Ebenso wie eine Gerade kann ein Kreisel als Koordinate benutzt werden. Die Kombination einer Geraden mit einem Kreisel ergibt eine Geraden-Kreisel-Zuordnung. Um diese Zuordnung anschaulich zu machen, bedient man sich der bereits besprochenen Diagramme als grafischer Darstellung, beleuchte nun für die Kombinationen Gerade-Kreisel den Aufbau eines solchen Diagramms.

Hierzu ist es zweckmäßig, die Bewegung des Kreisels auf eine Gerade zu übertragen, die ihrerseits dann mit einer anderen Geraden zu einem rechtwinkligen System zusammengesetzt werden kann. Hierzu gibt es verschiedene Möglichkeiten, z.B. kann die Projektion des Peripheriepunktes auf den Urschenkel abgebildet werden, man erhält hierbei die Figur des Kosinus (Bild 37A). Eine solche Projektion ist brauchbar für den *r-Kreisel*, insbesondere wenn die Einheit der Radius selbst ist.

Für den *u-Kreisel* rolle die Peripherie auf und glätte zu einer Geraden, wie man Papier von einer Rolle auf den Boden legt (Bild 37B). Der umlaufende Peripheriepunkt beschreibt den Weg einer Zykloiden auf der abrollenden Geraden, er startet bei dem Punkt Q und berührt die Gerade wieder beim Punkt 1, dann beim Punkt 2 usw. Bei dieser nach rechts gerichteten Darstellung taucht der Mittelpunkt nicht mehr auf, den Peripheriepunkt kann man sich auch als von Q nach 1 bewegt denken. Die Strecke Q/1 ist das Maß, die in der Abbildung eingezeichnete Linie ist keine echte Linie, sondern stellt wie üblich nur die Zuordnung der Punkte dar.

Man erhält damit ein Diagramm, in dem sich mit einer Kurve die Zuordnung einer linearen Koordinate mit einer Kreiselkoordinate darstellen lässt. In Bild 38C ist der Fall dargestellt, dass ein Punkte mit jedem Kreiselumlauf einem fernerem Punkt auf der Geraden zugeordnet ist.

Der Leser wird fragen, warum dieses in der Physik allgemein benutzte Weg-Zeitdiagramm ausführlich beschrieben wird. Der Grund ist, aufzuzeigen, dass die *u-Achse* nur der Darstellung halber eine Gerade darstellt, eine räumliche Dimension wird damit nicht geschaffen. Selbstverständlich ist es möglich, rein rechnerisch eine Länge  $H$  für die Strecke  $P_1$  zu  $P_2$  (Bild 37C) wie üblich anzugeben:

$$+H = \left( (2x-1x)^2 + (2u-1u)^2 \right) : 2$$

Lässt man die Richtungen der Achsen durch Weglassen von x und u weg, erhält man den Zahlenwert unabhängig von der Richtung, den sogenannten Abstand, der ist bekanntlich Wurzel Zwei. Man muss sich aber fragen, welchen Sinn dieser Wert eigentlich hat, jedenfalls nicht den, dass hier eine Strecke im räumlichen Sinne gemessen werden kann. u-Diagramme stellen also keine räumliche Dimension dar.

### 38.) Länge

Auf einer Zahlengeraden hatten wir die Länge zwischen zwei Punkten als die Differenz zwischen zwei Punkten definiert. Je nach verwendeter Operation kann die Länge positiv oder negativ ausfallen. In einer Fläche mit orthogonalen Koordinaten definiere die Länge zwischen zwei Punkten mit Hilfe des Satzes des Pythagoras als Wurzelausdruck:

$$H = \pm(x^2 + y^2)^{1/2}$$

Auch hier ist damit die Länge immer positiv oder negativ, gewöhnlich wird sie als Abstand und als solche nur positiv genommen. Das gilt auch im Fall die Länge der Koordinaten anders definiert wäre und negativ erscheinen würde, da im neuen Multiplikationssystem die Quadrate immer positiv werden.

Nehme nun in der Ebene eine der Koordinaten, als x-Koordinate oder Abszisse bezeichnet, nicht linear, und verbinden jeden Punkt in einem orthogonalen Gitter mit einer linearen y-Koordinate, der Ordinate, so ergeben die so gewonnenen Punkte in der Ebene keine Gerade, d.h. die Punkte sind nicht in der Flucht. In Bild 38A ist solch ein Fall dargestellt für die x-Koordinate mit dem Maß  $x^2$ . Werden die gewonnenen Punkte aneinander zugeordnet, d.h. verbunden, so ergibt sich bekanntlich eine *Parabel* als Kurve.

Ein Abstand zwischen zwei entfernten Punkten auf dieser Kurve könnte derart berechnet werden, dass der Abstand jeweils von einem zum anderen Punkt genommen und addiert würde. Dabei ergibt sich aber die Schwierigkeit, dass das Urmaß auf der Kurve nicht eingehalten wird. Definiere deshalb als Abstand zweier Punkte einer Kurve eine Größe, welche darauf hinausläuft, dass die Kurve auf der Urgeraden abgerollt wird, also zu einer Messgeraden wird, und die Kurvenpunkte mit den Punkten der Urgerade verglichen werden.

Hierzu gehe entsprechend wie bei der Betrachtung einer Geraden vor, bilde die Differenz dx der Abszisse und die Differenz dy der Ordinate, zeichne ein Dreieck (Bild 38B), bei der eine entsprechende Länge dH zunächst mit dem Satz des Pythagoras wie folgt dargestellt werden kann:

$$dH^2 = dy^2 + dx^2$$

Nach Umformung ergibt sich:

$$\pm dH = (dx^2 + (dy/dx)^2)^{1/2} dx$$

für  $dy/dx = y'$

$$\pm dH = (1 + y'^2)^{1/2} dx$$

Die Formel ist nur dann richtig, wenn die Länge dH gerade wäre. Das ist nur für einen Abstand von zwei Punkten richtig, wenn dx die Länge Q hat. In diesem Fall haben wir aber nicht mehr eine Länge, sondern nur noch das Verhältnis des Zuwachses einer Länge, also eine Ableitung einer Veränderungsfunktion der Länge H nach der variablen x. Es ist also nach der Stammfunktion zu suchen, welche als Ableitung den Längenzuwachs ergibt.

Die Stammfunktion wird als Integral wie bereits behandelt dargestellt, die Formel liefert den nunmehr nach den üblichen Methoden annäherungsweise ausrechenbaren Ausdruck für die Längenfunktion in Bezug auf die Abszisse:

$$H = \int (1 + y'^2)^{1/2} dx; \pm x,$$

Im Fall eines u-Diagramms sind lediglich die Koordinaten auszutauschen:

$$H = \int (1 + x'^2)^{1/2} du; \pm u,$$

Was sagt uns diese Längenfunktion? Es ist wieder das Verhältnis Urgerade zu Messgerade und damit ein Messvorgang. Die Abszisse, die hier eine Funktionalgerade im Verhältnis zur Ordinate ist, nehme als Urgerade, also mit gleichen Abständen, an und ermittle das Maß auf der Messgeraden, die aus Funktionalgerade und Ordinate durch Abrollen entsteht. Man kann die Betrachtung auch so vornehmen, dass die Ordinate die Funktionalgerade ist, in unserem Beispiel würde man  $y'^2 = \pm x$  erhalten.

Im Falle eines u-Diagramms ist der Kreis die Funktionalgerade und wir

ermitteln die Länge als Maß der Messgeraden mit der Bewegung des Kreisel. Dieser wird als konstant angenommen, sprich wir setzen ihn willkürlich als Urkreisel.

#### **42.) Krumme Koordinaten**

Gehe wieder von unserem kartesischen Ursystem aus und erzeuge wie vorhin ein deformiertes System mit einer deformierten Abszisse durch Drehung um den Ursprung. Bilde wieder einen Punkt P, dem im deformierten System der Punkt P' entspricht (Bild 42A). Nach dem bereits beschriebenen Aufbau ergeben sich die Folgerungen:

- a. Die Längen eines jeden Punktes sind von jedem System aus betrachtet gleich.
- b. Die von dem Punkt gebildete Fläche ist von jedem System aus betrachtet gleich.
- c. Die Abstände verschiedener Punkte sind in jedem System betrachtet gleich.

Sobald man jedoch ein System vom anderen aus betrachtet, stimmen die Flächen und die Abstände nicht mehr.

Betrachte nun eine Projektion eines Punktes P in einem kartesischen System von schräg oben (Bild 42B). In diesem Fall bewegt sich der Fußpunkt der Ordinate des Punktes P' nicht mehr auf einem Kreis, sondern auf einer Ellipse mit dem Ergebnis, dass die Längeneinheit der deformierten Abszisse  $x'$  im Verhältnis zur Urabszisse  $x$  mit steigendem Winkel kleiner wird. In diesem Fall stimmen die Längen der deformierten vom anderen System betrachtet aus nicht mehr überein, bei den übrigen Größen gibt es keine Änderung.

Man kann schließlich die deformierte  $x$  in der Gestalt deformieren, dass wir ihr hier nicht die Gestalt einer Geraden geben, sondern diejenige einer Kurve (Bild 42C). In diesem Fall bleibt lediglich noch als gleich die Länge der Ordinate vom jeweils anderen System aus gesehen übrig. Innerhalb jeden Systems gemessen sind aber alle Größen nach wie vor gleich.

#### **43.) Negative Parameter**

Nehme nun einen negativen Parameter, so erhalte für die Ausgangsfunktion  $y=x*b$  Hyperbeln, wie sich durch Umformung leicht ersehen lässt. Die Komplementäräste der Graphen sind ebenfalls abhängig wie bei der Funktion mit positiven Parameter von der Eigenschaft des Parameters als gerade oder ungerade Zahl (Bild 43A).

Welchen Graph hat nun die Funktion  $y=c*x$  für einen negativen Parameter? Zur Überlegung betrachte die Funktion für den Parameter +1, der in Bild 43B dargestellt ist. Der Graph ist eine Linie, die für jeden Wert von  $x$  den Wert der Funktion von 1 ergibt, also formelmäßig  $y=1$ .

Setze nun  $y=-1*x$  und untersuche für jeden Wert von  $x$  das Resultat. Dies ist in Bild 43C dargestellt, nämlich ein oszillierender Punkt. Die Abbildung zeigt die Werte für ganze Zahlen, die auf der Geraden  $y=1$  oder  $y=-1$  oszillieren. Soweit Werte zwischen den ganzen Zahlen betrachtet werden, wird die Oszillation dichter.

Setze nun für den Parameter andere Werte als 1 ein, so ist leicht einzusehen, dass der in Bild 43A dargestellte Graph nunmehr entsprechend dieser Form oszilliert.

Die Funktion  $y=c-*x$  oszilliert für jeden benachbarten Wert der Abszisse. Soweit der Parameter nicht als gerade oder ungerade festgestellt werden kann, ist die Bestimmung eines Wertes überhaupt nicht möglich. Diese Überlegungen gelten wiederum nur bei Verwendung des 9-er Modus.

#### **44.) Achter-Modus**

Wie sieht der Graph der oben untersuchten Funktionen nun aus im Achter-Modus? Dies ist ein inverses System zum neun-er Modus, vergegenwärtige folgende Matrix:  $++=-$

$$\begin{array}{rcl} + & - & = + \\ - & + & = + \\ - & - & = - \end{array}$$

Bezeichne dieses *inverse System* für die weiteren Überlegungen mit dem

Buchstaben  $i$  und füge es als Attribut dem Funktionszeichen der Monoplikation, also dem Plus- oder Minuszeichen bei. Es sollen die gleichen Regeln gelten wie für diese Zeichen, d.h. Plus mal Plus ist nicht Plusquadrat sondern immer Plus, also z.B.  $+i a \cdot +i a = -i a$

Das  $i$  haftet also dem Vorzeichen als Eigenschaft an und ist keine selbständige Zahl in diesem Sinne.

Betrachte zunächst ein geschlossenes inverses System, d.h. sämtliche Koordinaten sind auch invers, bezeichne sie mit  $ix$  und  $iy$ . Im übrigen sollen die Regeln für die Bildung der Plikationen und deren Umkehrungen die gleichen sein und der Parameter trägt kein Attribut.

Die Funktion  $y=x*a$  sieht nun im inversen System aus  $iy=ix*a$ . Ihr Graph ist in dem Bild 44A dargestellt und es ist leicht erkennbar, dass mit Kombination verschiedener Vorzeichen eine weitere Reihe von 8 Graphen zu erzeugen ist, welche das System der Graphen des Neuner-Modus zu 16 Graphen ergänzen. Diese 16 Graphen sind diejenigen Möglichkeiten, die kombinatorisch erzeugt werden können.

Damit ist das 8er-System zum 9er-System komplementär, daraus ergibt sich die theoretische Folgerung, dass beide Systeme die gleichen Möglichkeiten bieten, in ihren Eigenschaften gleich sind. Würde man beispielsweise das Negative als Hauptform ansehen, bräuchte man nur die Koordinaten um 180 Grad herumdrehen und würde zu völlig gleichen Ergebnissen wie mit dem Neuner-Modus kommen. Das 8er- und das 9er-System sind also spiegelbildlich äquivalent, eine Präferenz für das 9er-System gibt es nur dadurch, dass die positiven Koordinatenachsen als Präferenz gewählt werden.

Das gemeinhin als *komplex* behandelte Zahlensystem sieht nun so aus, dass eine komplexe Ebene dergestalt aufgespannt wird, indem eine Achse als Realteil und eine Achse als Imaginärteil gewählt wird (Bild 44B). Ein Punkt  $P$  in dieser Ebene hat demnach einen Realteil  $x$  und einen Imaginärteil  $iy$ . Die arithmetische Darstellung benützt ebenfalls das Zeichen  $i$ , dieses ist jedoch ein echter Faktor und kein Attribut, es stellt die Multiplikation von  $-1*:2$  dar. Arithmetisch ergibt sich demnach in der linearen Schreibweise für eine Quadratzahl

$$(+i.a) \cdot (+i.a) = -a$$

Im Gegensatz zum reinen 8er-System verschwindet hier im Resultat der Imaginärfaktor, es gibt also Berührungspunkte der Imaginärteile mit den Realteilen. Definitionsgemäß wird der Graph von komplexen Funktionen als u-Kreisel dargestellt, so dass periodisch mit einem Vielfachen von  $p$  diese Berührungspunkte auftreten.

Die komplexen Zahlen sind damit also kein gleichwertiges System wie das gebräuchliche 9er-System, sondern es ist ein kombiniertes System mit zusätzlichen besonderen nicht zwingenden Definitionen, nämlich ein Kombinationssystem aus dem 8er- und 9er-System mit der Darstellung der Punkte in einem Kreisel. Man kann die komplexen Zahlen als Mischform mit Tor bezeichnen, das Tor ist die Eigenschaft, dass die Konsekution in Richtung Realteil präferiert wird, weil im Gegensatz zum Verschwinden des Imaginärteils umgekehrt bei Operationen mit realen Größen ein Imaginärteil nicht auftritt, denn es wird festgesetzt:

$$i \cdot i = -1 \quad \text{und} \quad i = (-1)*:2$$

Es könnte aber genauso gut  $i = -(-1)*:2$  sein.

Man kann die oben erwähnte Tor-Eigenschaft der komplexen Zahlen vermeiden, indem man  $i.Q$  und  $Q$  als Resultante ansieht und den sonst erlaubten Schritt von  $iQ=0$  oder  $Q=0$  unterbindet. Das Tor  $0$  taucht damit nicht auf und es verbleibt ein vollkommenes Zwillingsystem von realen und inversen Zahlen.

Im Falle des 1er-Modus, gewöhnlich als positiven Betrag bezeichnet, gibt es nur Werte oberhalb der  $x$ -Achse (Bild 44C), im Falle des 16er-Modus tauchen nur Werte unterhalb der  $x$ -Achse auf. Die übrigen Modi könnte man entsprechend untersuchen, bei einigen tauchen überhaupt nur Werte in einem Quadranten auf, in anderen gibt es noch mehrere Werte in verschiedenen Quadranten. Auch diese Modi ergeben jeweils mit ihren Komplementärmodus 16 Kombinationen, insgesamt sind 128 Kombinationen möglich.

Mit triadischen Zahlen könnte man die entsprechenden Untersuchungen anstellen. Zunächst müsste ein geeignetes Koordinatensystem gefunden werden, dann sind die Zwischenabschnitte zu bestimmen, in diesem Fall sind es keine Quadranten, sondern terziale Abschnitte. Dann erfolgt die Bestimmung der präferierten Richtung usw.

#### **47.) Weitere Dimensionen**

Nach unserer bisherigen Betrachtung ist eine Dimension nichts anderes als eine Konstruktion von Fluchten vom Standpunkt aus und deren Verbindungen. Diese Verbindungen nenne die *Dimensionsachsen*, diese müssen nicht senkrecht aufeinander stehen, im Grunde genommen können es auch beliebig viele sein. Die Maßstäbe müssen weder gleich sein noch müssen die Dimensionsachsen zueinander derart konjugiert sein, dass die negative die positive in der rückwärtigen Flucht ist.

Zur graphischen Darstellung benütze durchweg die *Ebene*. Diese definiere so, dass sie aus der orthogonalen Dreidimensionalität den Ausschnitt zweier Raumachsen darstellt. Die Ebene ist also eine über die dritte Dimension definierte Fläche, die einige ausgezeichnete Eigenschaften hat, welche gewöhnlich als euklidisch bezeichnet werden. Auf dieser kann man z.B. ein dreidimensionales 4-Punkt-System darstellen (Bild 47 A), auf dem allerdings die räumliche Anordnung verloren geht, die Zuordnungen, beispielsweise die Linien, sind alle sozusagen platt.

Ein orthogonales dreidimensionales Plus-Minus-System ist das gewohnte kartesische Koordinatensystem. Haben wir drei Dimensionen, können wir auf die negativen Äste und die Orthogonalität verzichten und erhalten ein gleichwinkliges System durch gleichmäßige Anordnung der vier benötigten Punkte in einem Kreisel (Bild 47B). Die Koordinaten eines solchen Punktes werden wie im kartesischen System auch entsprechend ermittelt durch Abtragen der Abstände zuerst auf der ersten Koordinate, dann fortschreitend an diesem Punkt parallel zur zweiten Koordinate und angelangt an diesem Punkt fortschreitend parallel zur dritten Koordinate (siehe durchgezogene Linien zum Punkt B). Das System ist allerdings mehrdeutig, der Punkt B kann mit beliebig vielen anderen Maßkombinationen bestimmt werden (siehe gestrichelte Linie).

Um beispielsweise eine Vierdimensionalität darzustellen, welche aus drei orthogonalen mit x, y und z bezeichneten Raumkoordinaten sowie einer mit u bezeichneten Transvariablen besteht, kann man folgenden Weg einschlagen: Die meistbenutzten Koordinaten x und y werden orthogonal in der Ebene, die Raumkoordinate z wird als Deformierte dargestellt, ebenso die Transvariable u mit einem anderen Winkel (siehe Bild 47 C). Denken wir uns die Transvariable als die Zeit, dann könnte der Raumzeitpunkt P entsprechend der obigen Regel durch Abtragen der einzelnen Koordinaten entsprechend der Parallelen auf den jeweiligen Koordinatenpunkten gefunden werden. Umgekehrt ist es nicht möglich, eine eindeutige Zuordnung des Raumzeitpunktes P aus dieser Darstellung auf die einzelnen Koordinaten vorzunehmen, sie ist beliebig vieldeutig.

Bei der Arithmetisierung dieser Darstellung muss man sich entscheiden, ob man die Deformation ignorieren will oder nicht. Sie ignorieren heißt, man rechnet so, wie wenn die Deformierte in der Ebene läge, so dass im Grunde genommen ein zweidimensionaler Algorithmus entsteht. Oder man berücksichtigt jede Transvariable für sich, dann ist aber bei jeder Größe anzugeben, auf welche Koordinate sie sich bezieht, eine solche Größe wie der Abstand gibt dann keinen eindeutigen Sinn.

Im orthogonalen System kennen wir für den Abstand des Maßes  $dH$  für jede Dimension eine charakteristische Größe, sie beträgt für die erste Dimension 1, für die zweite 1,41.., für die dritte 1,73.., für die 4. 2,25, jeweils Plus oder Minus im Neunermodus. Es handelt sich hier jeweils um die Wurzel der entsprechenden Kardinalzahl. Man kann diese Zahl als Dimensionsdiagonale bezeichnen, diese wird mit jeder Dimension größer, der Zuwachs ist offenbar differenziell.

Es ist zu bemerken, dass  $dH$  insofern eine willkürliche Größe ist, als wir einen bestimmten Flächenbegriff zugrunde legen mit einer wiederum

bestimmten Arithmetisierung. Der verwendete quadratische Flächenbegriff hat sicher praktische Vorzüge, die verwendete Arithmetisierung dagegen ist schon weniger zwingend mit Verwendung des Neuner-Modus. Der Einser-Modus erscheint im gesamten dreidimensionalen System logischer, z.B. bei Rauminhalten. Er vermeidet die Positivpräferenz, die nötig ist, weil man negative Inhalte bislang nicht definiert hat

#### **48.) Immanente Koordinaten**

Erstelle ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem der Ebene mit den Achsen  $x$  und  $y$ . Bestimme irgend einen Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $|1,2|$ , weitergehend auf der  $x$ -Achse vom Standpunkt einen Punkt und dann senkrecht auf der  $y$ -Achse zwei Punkte weitergehend (Bild 48A). Nehme an, wir hätten in Bezug auf ein solches Koordinatensystem ein schiefes dergestalt, dass von irgendeinem Punkt die andere Koordinatenachse nicht im rechten Winkel, sondern in einem vom Punkt abhängigen Winkel zu errichten ist. Nehme weiter an, der Winkel wächst gleichmäßig mit jedem entfernten Punkt, so erhalte in Bezug auf ein gleichmäßiges Koordinatensystem eines, was man als verdrückt bezeichnen kann (Bild 48 B).

Denken nun, dass wir von dem geraden rechtwinkligen System nichts wissen und damit auch von den Winkeln der Koordinaten nicht, wende wieder unsere Bestimmungsregel zur Auffindung des Punktes  $P$  an und stelle fest, dass wir mit den gleichen Regeln zum entsprechenden Punkt kommen. Man kann auch die bisher gewohnte Arithmetik auf diese Koordinaten anwenden und kann in dem Beispielsfall zu vollkommen gleichen Ergebnissen kommen, wie wenn wir ein nicht verdrücktes, sondern gleichmäßiges Koordinatensystem vor uns hätten. Im Falle eines solchen verdrückten Koordinatensystems ist also ohne das orthogonale Vergleichssystem nicht erkennbar, ob es verdrückt ist. Solch ein Koordinatensystem, das unabhängig von anderen insbesondere orthogonalen Vergleichssystemen ist, nenne immanent. Halte also fest, dass das Verdrücken einer Ebene mit einem immanenten Koordinatensystem nicht bemerkbar ist.

Denke weiter nicht die Ebene einfach verdrückt im obigen Sinne, sondern gehe einen Schritt weiter und verbiege sie so total, dass sie sich wieder berührt. Wir können uns in erster Stufe die Oberfläche eines Zylinders vorstellen, die  $x$ -Achse ist eine Gerade auf dem Mantel, die  $y$ -Achse ist ein Kreis auf dem Mantel (Bild 48C). Die  $y$ -Achse nenne Kreiselgerade, sie soll vier Punkte aufweisen, d.h. der vierte Punkt ist wieder der erste. Fasse die Koordinaten wieder als immanent auf, d.h. betrachte die Punkte nicht durch ein gleichmäßiges in dem Fall räumliches kartesisches Koordinatensystem, sondern durch das oben benannte immanente System. Der Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $|1,2|$  wird also wieder dadurch gefunden, dass wir auf der  $x$ -Achse zum ersten Punkt gehen und dort senkrecht den zweiten Punkt auf der  $y$ -Achse aufsuchen. Bis zum dritten Punkt kann man die in der oben erklärten verdrückten Ebene keinen Unterschied feststellen, auch die Arithmetik gibt keinen Hinweis auf die gebogene Zylinderoberfläche. Erst ab dem Punkt  $y\#4$  erscheint eine Abartigkeit, nämlich der Punkt  $y\#4$  ist gleich dem Punkt  $x\#1$ , was in der gleichmäßigen Ebene nicht der Fall ist.

Man kann nun noch einen Schritt weitergehen und auch die  $x$ -Achse als Kreisel ausgestalten, so dass wir eine Kugel in Bezug auf ein gleichmäßiges Koordinatensystem hätten (Bild 48D). Stelle nun wiederum mit Hilfe der immanenten Koordinaten fest, wo ein Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $|1,1|$  ist und werde feststellen, er ist auf gleicher Weise zu finden und bei diesem Punkt ist kein Hinweis auf das gekrümmte System zu finden. Erst wiederum bei dem vierten Punkt bemerken wir, dass der Punkt gleich dem ersten ist, und zwar diesmal sowohl bei der  $y$ -Achse als auch bei der  $x$ -Achse. Es gelten damit folgende arithmetische Beziehungen bei diesen kugelimmanenten Koordinaten, wobei die Achsenpunkte  $x\#a$  attributiv dargestellt werden als  $ax$ , was wohlgemerkt keine Multiplikation bedeuten soll:

$$\begin{array}{rcl} + -2x + -2y & = & - +Qy \\ + -2x & = & + -2y \\ + -4x & = & - +Qx \\ + -4y & = & - +Qy \end{array}$$

Was hier mit zwei Punkten gezeigt wurde, kann auch mit vielen oder auch mit  $\infty$  Punkten gemacht werden. Es gilt dann beispielsweise  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ , während wir in der euklidischen Geometrie und Arithmetik nur die Beziehung  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$  kennen.

Man sieht, die Beziehungen haben etwas Ähnlichkeit mit der Kreiseldarstellung der komplexen Zahlen, bei der Zylinderfläche erscheinen bei der  $y$ -Achse periodisch gleiche Werte. Gewohnte Begriffe wie die Größe einer Fläche führen bei der üblichen arithmetischen Behandlung zu Widersprüchen und müssten anders definiert werden. Bei einer solchen Fläche ist also selbst aus immanenten Koordinaten zu ersehen, dass die Fläche andere Eigenschaften aufweist als die oben behandelten.

Die obigen Kugelkoordinaten bilden erkennbar krumme Flächen, die sie bildenden immanenten Koordinaten sind absolut krumme Koordinaten. Die oben behandelten verdrückten nicht aus sich heraus erkennbar krummen Flächen sind nur relativ krumme Flächen, bei denen aus den immanenten Koordinaten die Krümmung nicht sichtbar wird, sondern nur im Vergleich mit einem anderen System. Dann bleibt aber offen, welches das krumme und welches das gerade System ist, eine Unterscheidung kann nur willkürlich durch Festlegung getroffen werden.

Die Frage krumm oder gerade auf eine Fläche ist also eine Frage der benutzten Koordinaten. Mit immanenten Koordinaten ist eine Krümmung nur bei absolut krummen Flächen erkennbar, und zwar über die abweichende Arithmetik. Mit anderen, also derivativen Koordinaten, ist die Krümmung jederzeit mit der charakteristischen Länge des des Urkoordinatensystems feststellbar. Dabei sind die Urkoordinaten immer immanent orthogonal.

### **50.) Kegelschnitte**

Variiere nun die Kreis-Punktdarstellung der Rotationskurve.  $S$  sei ein Punkt (Strich im Bild 50),  $M$  der Mittelpunkt eines Kreisels (Boppel) und  $tQ$  der Nullpunkt seiner Peripherie. Lege eine Strecke  $|S/tQ|$  (dünner Strich) mit einem festen Abstand fest, die Maßstrecke heißen soll, und verändere den Radius  $tQ/M$  des Kreisels auf der Geraden der Strecke. Betrachte dabei nur diejenige Kurve, welche die Maßstrecke mittig schneidet. Für diese soll gelten:

Die Kurve ist die radiale Mittellinie zwischen einem Punkt und einem Kreisel.

Setze zunächst den Mittelpunkt  $M$  in den Punkt  $tQ$ , der Maßkreisel verschwindet dadurch in seinen Mittelpunkt (Bild 50A). Als Kurve ergibt sich eine zur Maßstrecke senkrechte Gerade.

Bewege nun den Mittelpunkt  $M$  weg vom Punkt  $tQ$  nach rechts, so dass der Kreisel negativ größer wird. (Bild 50B). Es ergibt sich nun ein Außenabstand des Kreisels zur Kurve. Als Kurve haben wir eine *Hyperbel* nach der üblichen Definition erkennbar. Je weiter der Radius vergrößert wird, desto gekrümmter wird die Hyperbel.

Entferne den Mittelpunkt  $M$  des Kreisels immer mehr, sein Radius wird größer, seine Krümmung geringer, bis schließlich bei einem Abstand des Punktes  $M$  von  $\infty$  bzw.  $-\infty$  keine Krümmung mehr vorhanden ist (Bild 50C), die Peripherie ist eine Gerade. Es ergibt sich für die Kurve eine *Parabel* mit der üblichen Definition. Der Kreiselmittelpunkt  $M$  befindet sich nun sowohl bei  $\infty$  wie bei  $-\infty$ .

Wird der Kreisel von der gegenüberliegenden Seite herangeholt, wird die Peripherie wieder gekrümmt, aber entgegengesetzt, der Kreisel ist wieder positiv. Die Kurve ist nun über die konkave Seite des Kreisels in gleicher Weise zu bestimmen und man erhält eine Ellipse (Bild 50D).

Nähere den Kreisel weiter, fällt sein Mittelpunkt  $M$  mit dem Punkt  $S$  zusammen, die Kurve wird zu einem Kreis (Bild 50E).

Nun wandert der Mittelpunkt  $M$  auf der Maßstrecke. Bevor er deren Mitte erreicht hat, begegnen uns ständig kleiner werdende Ellipsen (Bild 50F).

Wenn die Mitte der Maßstrecke erreicht ist, verschwindet die Ellipse und die Kurve ist ein Strahl, ausgehend von  $S$  (Bild 50G).

Wandert der Kreisel weiter, wird der Kreis ständig kleiner, der Strahl

spaltet sich zunehmend zu einer Hyperbel auf (Bild 50H), bis schließlich der Kreis im Ausgangspunkt  $t_Q$  als Punkt verschwindet und die Ausgangsstellung erreicht ist.

Die obige Definition gilt also für alle Kegelschnitte. Bestimmend für das Aussehen der Kurve ist die Maßstrecke und der Maßkreis. Mit Hilfe der Gleichungen der Kegelschnitte lassen sich anders bisher nicht darstellbare Figuren in Gleichungsform arithmetisch ausdrücken, man verwendet hierzu die allgemeine Form des Kegelschnitts

$$(x-a)^2 : A^2 \pm (y-b)^2 : B^2 = 1$$

und setzt entsprechende Randwerte ein. So lässt sich beispielsweise ein Punkt mit den Koordinaten  $x\#a$  und  $y\#b$  mit der Kreisgleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

mit dem Radius  $R$  zu einer Punktdarstellung formen mit der Reduzierung des Radius auf  $R\#Q$ , woraus folgt  $R^2=Q^2=0$ , da  $Q^2$  bereits alleine steht. Es errechnet sich die Ordinate zu

$$y = b + [-(x-a)^2]^{1/2}$$

Setze probierhalber  $x\#a$

$$= b + [-(a-a)^2]^{1/2} = b + [-(a-Q)^2]^{1/2}$$

$$= b + (ia-Q) = b + (ia-ia) = b$$

Alle anderen rechenbaren Werte außer  $x\#a$  erfüllen die Bedingung der Konsekution mit 0 nicht, sodass ein auf beiden Achsen singulärer Wert erscheint, eben ein Punkt. Durch Reduktion des Radius auf  $Q$  erhält man einen Punkt, umgekehrt gilt das nicht augenscheinlich.